INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXVI. BAND ERSTES HEFT 1958

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 23. Dezember 1957

Postverlagsort Berlin

Preis DM 12,—

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel,** Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz,** Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter,** Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. **E. Mettler.** Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden,** Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt,** Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen,** Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg

Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin W 35

Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Inhalt:

Seite

Kraus, L., Die Integralgleichungen der Kippung gerader Träger mit dünnwandigen, offenen und doppeltsymmetrischen Profilen. Mit 7 Abbildungen 1

Naruoka, M., und *H. Yonezawa*, A Study on the Period of the Free Lateral Vibration of the Beam Bridge by the Theory of the Orthotropic Rectangular Plate. Mit 17 Abbildungen 20

Heinrich, G., und *K. Desoyer*, Praktische Methoden zur Lösung von Problemen der stationären und instationären Grundwasserströmungen. Mit 13 Abbildungen 30

Weidenhammer, F., Auswanderungserscheinungen in Schwingungsmeßgeräten. Mit 8 Abbildungen 43

Falk, S., Die Berechnung offener Rahmentragwerke nach dem Reduktionsverfahren. Mit 25 Abbildungen..... 61

Windels, R., Berichtigung 80

INGENIEUR-ARCHIV

XXVI. BAND ERSTES HEFT 1958

Die Integralgleichungen der Kippung gerader Träger mit dünnwandigen, offenen und doppeltsymmetrischen Profilen

Von L. Kraus

1. Einleitung. Die Erforschung der Mechanik des Kipp-Problems bei geraden Trägern mit dünnwandigen, offenen und doppeltsymmetrischen Profilen, jenes Sonderfalles des Biegedrillknickens, kann man heute als abgeschlossen betrachten. Seit dem Erscheinen der Dissertation von *L. Prandtl*[1], in welcher zum ersten Male des Auskippen von Trägern behandelt wurde, entstand eine Fülle von Literatur[2,3]. Eine vollständige Darstellung des Knickens, Biegedrillknickens und Kippens mit zahlreichen Literaturangaben ist wohl in dem neuen Lehrbuch von *Kollbrunner* und *Meister*[4] zu finden. Abgesehen von einfachen Sonderfällen sind die mathematischen Schwierigkeiten bei der Lösung von Kipp-Problemen naturgemäß sehr groß. Auch sind hierbei das Ritz- und das Differenzen-Verfahren im allgemeinen recht mühevoll. Deshalb liegen zahlenmäßige Ergebnisse bei den oben erwähnten Veröffentlichungen nicht für alle in der Praxis auftretenden Fälle vor.

Im folgenden wird daher ein Weg gezeigt, auf dem man mit erträglichem Rechenaufwand, wenn auch nur näherungsweise, so doch mit beliebig steigerungsfähiger Schärfe, kritische Kippwerte errechnen kann. Für den in zwei Gabeln gelagerten, geraden Träger und für den geraden Kragträger mit dünnwandigem, offenem, doppeltsymmetrischem und über die Trägerlänge konstant bleibendem Profil werden bei allgemeinster, stetiger Momentenverteilung die Integralgleichungen mitgeteilt. Die Integralgleichungen für den Sonderfall des Kragträgers, bei dem die Kipplast im Schwerpunkt des Endquerschnittes angreift, stellte *E. A. Deuker*[5] auf. In der vorliegenden Arbeit gilt zuerst einschränkend, daß die äußeren Lasten ihre Angriffspunkte in der Schwerlinie des Trägers haben. Dann wird diese Einschränkung fallengelassen. Das heißt, die Wirkungslinie der auf den Träger wirkenden, stetig verlaufenden Streckenlast q besitzt einen Abstand e von der Trägerschwerlinie. Aus den zuerst unter der Einschränkung gewonnenen Integralgleichungen erhält man die Integralgleichung für $e \neq 0$ durch Umformung des Kernes. Wie immer bei Kippaufgaben, so ist auch in den folgenden Untersuchungen die Wirkungsebene der äußeren Kräfte gleich der aus Schwer- und Minimumsträgheitsachse gebildeten Ebene.

2. Die Grundgleichung. Die selbstadjungierte, einfache Differentialgleichung vierter Ordnung, welche den Kippvorgang eines Trägers mit den oben aufgezählten mechanischen und geometrischen Eigenschaften und der oben gemachten Einschränkung beschreibt, lautet in den dimensionslosen Koordinaten ϑ und s folgendermaßen[6]

$$-\frac{1}{a^2}\,\vartheta_{ssss} + \vartheta_{ss} + \bar{\lambda}\, M^2(s)\,\vartheta = 0\,. \tag{1}$$

Dabei bedeuten

$$a = \sqrt{\frac{D\,l^2}{E\,C_s}}$$

den dimensionslosen „Wölbkennwert" des Trägerprofiles,

$$\bar{\lambda} = \frac{(M^* l)^2}{B\,D}$$

den dimensionslosen Eigenwert der Differentialgleichung, l die Trägerlänge [cm], $D = G\,J_T$ die Torsionssteifigkeit nach *de St. Venant* [kpcm²], C_s den auf den Schwerpunkt bezogenen Wölbwider-

---

[1] *L. Prandtl*, Kipperscheinungen, Diss. München 1899.
[2] *S. Timoshenko*, Theory of Elastic Stability S. 239—286. New York 1936.
[3] *E. Chwalla*, Forschh. a. d. Geb. Stahlbau Nr. 2. Berlin 1939.
[4] *C. Kollbrunner* u. *M. Meister*, Knicken. S. 97—147. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955.
[5] *E. A. Deuker*, Ing.-Arch. 21 (1953) S. 399.
[6] Siehe Fußnote 3 S. 32, Gl. (D 10).

stand des Trägerprofiles [cm^6], $B = E J_{min}$ die Biegesteifigkeit der Minimumsträgheitsachse [kpcm^2], x die Längenkoordinate [cm] zur Beschreibung des Abstandes vom linken Trägerende (die x-Achse ist mit der Schwerachse des Trägers identisch), $s = x/l$ die dimensionslose, auf die Länge des Trägers bezogene Koordinate, ϑ den Drillwinkel, M^* die ausgezeichnete Ordinate im Momentendiagramm [kpcm], z. B. $q\,l^2/8$ beim Träger auf 2 Stützen mit Gleichstreckenlast q, $M(s)$ den qualitativen, dimensionslosen Verlauf des Momentendiagrammes, z. B. $4\,(x/l)\,(1 - x/l) = 4\,s\,(1 - s)$ beim Träger auf zwei Stützen mit Gleichstreckenlast q, und Striche bedeuten Ableitungen nach s.

3. Die Integralgleichung für den Rechteckquerschnitt. Für Rechteckprofile nimmt der Wölbwiderstand C_ω den Wert 0 an. Der Wölbkennwert a wird unendlich groß, und das Glied mit $\vartheta_{,,,,}$ in (1) verschwindet. Gleichung (1) reduziert sich somit auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\vartheta_{,,} + \bar{\lambda}\, M^2(s)\, \vartheta = 0\,. \tag{2}$$

Wir überführen nun (2) für verschiedene Randbedingungen in Integralgleichungen. Zu diesem Zwecke denken wir uns in (2) den mit ϑ behafteten Term auf die rechte Seite geschafft und mit $f(s)$ bezeichnet. Die verbleibende linke Seite nennen wir $L[\vartheta]$. Es gilt also[1]

$$\left.\begin{aligned} f(s) &= -\bar{\lambda}\, M^2(s)\, \vartheta\,, \\ L[\vartheta] &= \vartheta_{,,}\,, \\ L[\vartheta] &= f(s)\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Gleichung (3) kann man somit als eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten auffassen. Die Lösungen u_1 und u_2 der homogenen Differentialgleichung (3) lauten beim Fortlassen der Integrationskonstanten:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= s\,, \\ u_2 &= 1\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Aus den n berechneten Lösungen u_i einer homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung $L[\vartheta] = 0$ kann man bekanntlich durch Variation der Konstanten nach *Lagrange* die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung $L[\vartheta] = f(s)$ wie folgt gewinnen.

Man macht einen Ansatz:

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i\,.$$

In allen Ableitungen von ϑ außer der n-ten, setzt man die mit v_i' behafteten Glieder Null und arbeitet sie in die inhomogene Differentialgleichung ein. Damit erhält man ein lineares Gleichungssystem in v_i', woraus man die v_i' berechnen kann und dann durch Integration die v_i. Die aus dieser Integration herrührenden n Integrationskonstanten sind mit den Integrationskonstanten der vollständigen Differentialgleichung identisch.

In unserem Falle errechnen wir v_1' und v_2' zu

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= f(s)\,, \\ v_2' &= -\,s\,f(s)\,, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

daraus durch Integration:

$$\left.\begin{aligned} v_1(s) &= \int_0^s f(t)\,dt + C_1\,, \\ v_2(s) &= -\int_0^s t\,f(t)\,dt + C_2\,, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

und schließlich die vollständige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3)

$$\vartheta(s) = \sum_{i=1}^{2} u_i\, v_i = \int_0^s s\,f(t)\,dt + C_1\,s - \int_0^s 1\,t\,f(t)\,dt + 1\,C_2\,. \tag{7}$$

Bedenken wir, daß

$$f(t) = -\bar{\lambda}\, M^2(t)\, \vartheta(t)\,, \tag{7a}$$

[1] *F. Schwank*, Randwertprobleme, S. 232—324, Leipzig 1951.

dann folgt aus (7) und (7a) die Integralgleichung für (2):

$$\vartheta(s) = -\bar{\lambda}\int_0^s s\, M^2(t)\,\vartheta(t)\,dt + \bar{\lambda}\int_0^s t\, M^2(t)\,\vartheta(t)\,dt + C_1 s + C_2 . \tag{8}$$

C_1 und C_2 berechnen sich aus den Randbedingungen. Diese lauten für einen Träger auf zwei Stützen mit Gabellagerung[1]

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= 0 \quad \text{für} \quad s = 0 , \\ \vartheta &= 0 \quad \text{für} \quad s = 1 , \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und für einen Kragträger mit einer Einzellast P im Abstand e_P über dem Schwerpunkt des Endquerschnittes, wobei die Abszisse s vom freien Ende (Lastende) aus gezählt ist,

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= 0 \quad \text{für} \quad s = 1 , \\ \vartheta' + \sqrt{\bar{\lambda}}\,\alpha\,\vartheta &= 0 \quad \text{für} \quad s = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

In (10) ist der Eigenwert $\bar{\lambda}$ definiert durch $\sqrt{\bar{\lambda}} = P l^2/\sqrt{B\,D}$ und α gegeben durch $\alpha = (e_P/l)\sqrt{B/D}$.

Eine eventuell zusätzlich auf den Kragträger wirkende Streckenlast q müßte bei der Bestimmung der Kippstabilität in Abhängigkeit von P ausgedrückt werden (z. B. $q = \text{konst.} = \gamma^*\, P/l$).

a) Der Träger auf zwei Stützen. Wir betrachten zuerst den Träger auf zwei Stützen. Wir erhalten aus (8) und (9)

$$C_2 = 0$$

und

$$C_1 = \bar{\lambda}\int_0^1 M^2(t)\,\vartheta(t)\,dt - \bar{\lambda}\int_0^s t\, M^2(t)\,\vartheta(t)\,dt .$$

Setzen wir nun die errechneten Werte für C_1 und C_2 in (8) ein und spalten die Integrale auf in

$$\int_0^1 = \int_0^s + \int_s^1 ,$$

dann erhalten wir

$$\vartheta(s) = \bar{\lambda}\int_0^s t\,(1-s)\,M^2(t)\,\vartheta(t)\,dt + \bar{\lambda}\int_s^1 s\,(1-t)\,M^2(t)\,\vartheta(t)\,dt . \tag{8a}$$

Multiplizieren wir nun (8a) mit $M(s)$ und definieren eine neue Funktion

$$\varphi(s) = M(s)\,\vartheta(s) , \tag{8b}$$

dann formt sich (8a) um in

$$\varphi(s) = \bar{\lambda}\left[\int_0^s t\,(1-s)\,M(s)\,M(t)\,\varphi(t)\,dt + \int_s^1 s\,(1-t)\,M(t)\,M(s)\,\varphi(t)\,dt\right] . \tag{8c}$$

Die Integralgleichung für (2) mit den Randbedingungen (9) lautet somit

$$\left.\begin{aligned} \varphi(s) &= \bar{\lambda}\int_0^1 K(s,t)\,\varphi(t)\,dt \\ \text{mit} \qquad & \\ K(s,t) &= t\,M(t)\,(1-s)\,M(s) \quad \text{für} \quad o \leqq t \leqq s , \\ K(s,t) &= s\,M(s)\,(1-t)\,M(t) \quad \text{für} \quad s \leqq t \leqq 1 . \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Für den Sonderfall, daß das Moment über den Träger konstant ist, gilt

$$M(s) = 1 .$$

Somit geht (2) in eine Differentialgleichung über, die in der Literatur als Knickgleichung für den an beiden Enden gelenkig gelagerten Stab bekannt ist

$$\vartheta'' + \bar{\lambda}\,\vartheta = 0 .$$

Setzen wir in (11)

$$M(s) = M(t) = 1 ,$$

[1] Siehe S. 61 und S. 58 der in Fußnote 3 von Seite 1 genannten Arbeit.

dann ist sofort zu erkennen, daß sich der Kern in den von *Klöppel* und *Lie* aufgestellten Kern des beiderseitig gelagerten Knickstabes verwandelt[1]. Damit haben wir eine wertvolle Kontrolle für die Richtigkeit von (11) gewonnen.

b) Der Kragträger. Beim Kragträger verläuft die Aufstellung der Integralgleichung analog. ϑ' ergibt sich zu

$$\vartheta'(s) = \sum_{i=1}^{2} u_i' v_i = 1 \int_0^s f(t)\, dt + 1\, C_1 . \qquad (12)$$

Gleichungen (7), (10) und (12) liefern

$$C_1 = \frac{-\sqrt{\bar\lambda}\,\alpha}{1-\sqrt{\bar\lambda}\,\alpha} \int_0^1 (t-1) f(t)\, dt ,$$

$$C_2 = \frac{1}{1-\sqrt{\bar\lambda}\,\alpha} \int_0^1 (t-1) f(t)\, dt .$$

Mit den errechneten Werten für C_1 und C_2 gehen wir in (7) unter Beachtung von (7a) und (8b) und erhalten

$$\varphi(s) = \bar\lambda \int_0^1 K(s,t)\, \varphi(t)\, dt$$

mit

$$\left.\begin{aligned} K(s,t) &= \frac{1}{1-\sqrt{\bar\lambda}\,\alpha}\left(1-\sqrt{\bar\lambda}\,\alpha\, t\right)(1-s)\; M(s)\, M(t) \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq s , \\ K(s,t) &= \frac{1}{1-\sqrt{\bar\lambda}\,\alpha}\left(1-\sqrt{\bar\lambda}\,\alpha\, s\right)(1-t)\; M(t)\, M(s) \quad \text{für} \quad s \leqq t \leqq 1 . \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Für $M(s) = s$, $M(t) = t$ und $\alpha = 0$ geht der Kern aus (13) in den unabhängig von uns aufgestellten Kern (3.25) der *Deuker*schen Arbeit über. Durch diese Betrachtung ist die Richtigkeit von (13) wohl außer Zweifel gestellt.

4. Die Integralgleichung für den I-Querschnitt. Bei I-Profilen ist der Wölbwiderstand von Null verschieden. Somit gilt für das reziproke Quadrat des Wölbkennwertes der Bereich

$$0 < \frac{1}{a^2} < \infty$$

und das Glied mit $1/a^2$ verschwindet nicht in (1). Wiederum berechnen wir die Integralgleichung für die vollständige Gleichung (1) nach der Methode von *Lagrange*. Es gilt

$$\left.\begin{aligned} L[\vartheta] &= \frac{1}{a^2}\vartheta_{\cdots\cdots} - \vartheta_{\cdot\cdot} , \\ f(s) &= +\bar\lambda\, M^2(s)\, \vartheta , \\ L[\vartheta] &= f(s) , \\ \vartheta &= \sum_{i=1}^{4} u_i v_i . \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Die vier Lösungen u_i der Differentialgleichung $L[\vartheta] = 0$ lauten

$$u_1 = e^{+as}, \quad u_2 = e^{-as},$$
$$u_3 = s , \qquad u_4 = 1 .$$

Analog zu den in Abschnitt **3** dargestellten Operationen erhalten wir die Lösungen für das in v_i' lineare Gleichungssystem

$$v_1' = +\frac{1}{2a} f(s)\, e^{-as} ,$$

$$v_2' = -\frac{1}{2a} f(s)\, e^{+as} ,$$

[1] *K. Klöppel* u. *K.-H. Lie*, Stahlbau 16 (1943) S. 17; dort Gl. (14) und (17).

$$v_3' = -f(s)\,,$$
$$v_4' = +\,s\,f(s)$$

und daraus durch Integration

$$v_1 = +\frac{1}{2\,a}\int_0^s f(t)\,e^{-a\,t}\,dt + C_1\,,$$

$$v_2 = -\frac{1}{2\,a}\int_0^s f(t)\,e^{+a\,t}\,dt + C_2\,,$$

$$v_3 = -\int_0^s f(t)\,dt + C_3\,,$$

$$v_4 = +\int_0^s t\,f(t)\,dt + C_4\,.$$

Somit ergibt sich für ϑ, ϑ', ϑ'' und ϑ''' nach Einführung der Hyperbelfunktionen

$$\vartheta(s) = \sum_i u_i\,v_i = \frac{1}{a}\int_0^s \{\mathfrak{Sin}\,[a\,(s-t)] - a\,(s-t)\}\,f(t)\,dt + C_1\,e^{+a\,s} + C_2\,e^{-a\,s} + C_3\,s + C_4\cdot 1\,, \tag{15a}$$

$$\vartheta'(s) = \sum u_i'\,v_i = \int_0^s \{\mathfrak{Cof}\,[a\,(s-t)] - 1\}\,f(t)\,dt + C_1\,a\,e^{+a\,s} - C_2\,a\,e^{-a\,s} + C_3\cdot 1\,, \tag{15b}$$

$$\vartheta''(s) = \sum_i u_i''\,v_i = a\int_0^s \{\mathfrak{Sin}\,[a\,(s-t)]\}\,f(t)\,dt + C_1\,a^2\,e^{+a\,s} + C_2\,a^2\,e^{-a\,s}\,, \tag{15c}$$

$$\vartheta'''(s) = \sum_i u_i'''\,v_i = a^2\int_0^s \{\mathfrak{Cof}\,[a\,(s-t)]\}\,f(t)\,dt + C_1\,a^3\,e^{+a\,s} - C_1\,a^3\,e^{-a\,s}\,. \tag{15d}$$

Gleichung (15a) stellt im wesentlichen schon die vollständige Integralgleichung des Kipp-Problems dar. Die vier Integrationskonstanten errechnen sich aus folgenden Randbedingungen [1]

1. bei einem in zwei Gabeln gelagerten Träger

a) mit Wölbfreiheit an beiden Trägerenden

$$\left.\begin{aligned}\vartheta &= 0\\ \vartheta'' &= 0\end{aligned}\right\}\ \text{für } s = 0 \text{ und } s = 1\,, \tag{16a}$$

b) mit Wölbfreiheit am linken und Wölbverhinderung am rechten Trägerende

$$\left.\begin{aligned}\vartheta &= 0 \quad \text{für } s = 0 \text{ und } s = 1\,,\\ \vartheta' &= 0 \quad \text{für } s = 1\,,\\ \vartheta'' &= 0 \quad \text{für } s = 0\,,\end{aligned}\right\} \tag{16b}$$

c) mit Wölbverhinderung an beiden Enden

$$\left.\begin{aligned}\vartheta &= 0\\ \vartheta' &= 0\end{aligned}\right\}\ \text{für } s = 0 \text{ und } s = 1\,; \tag{16c}$$

2. beim Kragträger mit einer Last P im Abstand e_P über dem Schwerpunkt des Endquerschnittes, wo $\alpha = (e_P/L)\sqrt{B/D}$ und $\bar{\lambda} = (P\,l^2)^2/B\,D$

a) mit Wölbfreiheit an beiden Enden

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}-\vartheta' + \frac{1}{a^2}\vartheta''' &= \sqrt{\bar{\lambda}}\,\alpha\,\vartheta\\ \vartheta'' &= 0\end{aligned}\right\}\ \text{für } s = 0\,,\\ &\left.\begin{aligned}\vartheta &= 0\\ \vartheta'' &= 0\end{aligned}\right\}\ \text{für } s = 1\,,\end{aligned}\right\} \tag{16d}$$

[1] Siehe S. 34 Gl. (D 13), S. 33 Gl. (D 12) und S. 35 Gl. (D 22) der zitierten Arbeit von *Chwalla*.

b) mit Wölbfreiheit am freien Ende ($s = 0$) und Wölbverhinderung am Einspannende ($s = 1$):

$$\left.\begin{aligned} -\vartheta' + \frac{1}{a^2}\vartheta''' &= \sqrt{\bar{\lambda}}\,\alpha\,\vartheta \\ \vartheta'' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } s = 0\,, \qquad \left.\begin{aligned} \vartheta &= 0 \\ \vartheta' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } s = 1\,. \tag{16e}$$

a) Der Träger auf zwei Stützen. Wir untersuchen im Folgenden den praktisch wichtigsten Fall beim Träger auf zwei Gabel-Lagern. Er ist durch die Randbedingungen (16a) gekennzeichnet und liefert die tiefsten Eigenwerte.

Mit den sich aus (16a) ergebenden Integrationskonstanten

$$C_1 = -C_2 = -\frac{1}{2\,a\,\mathfrak{Sin}\,[a]}\int_0^1 \{\mathfrak{Sin}\,[a\,(1-t)]\}\,f(t)\,dt\,,$$

$$C_3 = \int_0^1 (1-t)\,f(t)\,dt\,,$$

$$C_4 = 0$$

und mit den Gleichungen (15a) und (8b) erhalten wir die Integralgleichung

$$\varphi(s) = \bar{\lambda}\int_0^1 K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

mit

$$\left.\begin{aligned} K(s,t) &= \left\{t\,(1-s) - \frac{\mathfrak{Sin}\,[a(1-s)]\,\mathfrak{Sin}\,[a\,t]}{a\,\mathfrak{Sin}\,[a]}\right\} M(s)\,M(t) \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq s\,, \\ K(s,t) &= \left\{s\,(1-t) - \frac{\mathfrak{Sin}\,[a(1-t)]\,\mathfrak{Sin}\,[a\,s]}{a\,\mathfrak{Sin}\,[a]}\right\} M(t)\,M(s) \quad \text{für} \quad s \leqq t \leqq 1\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Für den Grenzübergang $a \to \infty$ geht (17) in (11) über. Dies erkennt man leicht, wenn man im Kern von (17) die hyperbolischen Kreisfunktionen durch e-Funktionen ausdrückt und Nenner und Zähler durch $a\,e^a$ teilt. Die Unterfälle (16b) und (16c) können analog zum Unterfall (16a) berechnet werden.

b) Der Kragträger. Für den Kragträger mit den Randbedingungen (16d) ergeben sich die Integrationskonstanten zu

$$C_1 = -C_2 = -\frac{1}{2\,a\,\mathfrak{Sin}\,[a]}\int_0^1 \{\mathfrak{Sin}\,[a\,(1-t)]\}\,f(t)\,dt\,,$$

$$C_4 = -\frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}}\,\alpha}\,C_3 = \frac{1}{1-\sqrt{\bar{\lambda}}\,\alpha}\int_0^1 (1-t)\,f(t)\,dt\,.$$

Daraus folgt mit (15a) und (8b) die Integralgleichung

$$\varphi(s) = \bar{\lambda}\int_0^1 K(s,t)\,\varphi(t)\,dt\,,$$

mit

$$\left.\begin{aligned} K(s,t) &= \left\{\frac{1}{1-\sqrt{\bar{\lambda}}\,\alpha}\left(1-\sqrt{\bar{\lambda}}\,\alpha\,t\right)(1-s) - \frac{\mathfrak{Sin}\,[a(1-s)]\,\mathfrak{Sin}\,[a\,t]}{a\,\mathfrak{Sin}\,[a]}\right\} M(s)\,M(t) \\ &\qquad\qquad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq s\,, \\ K(s,t) &= \left\{\frac{1}{1-\sqrt{\bar{\lambda}}\,\alpha}\left(1-\sqrt{\bar{\lambda}}\,\alpha\,s\right)(1-t) - \frac{\mathfrak{Sin}\,[a(1-t)]\,\mathfrak{Sin}\,[a\,s]}{a\,\mathfrak{Sin}\,[a]}\right\} M(t)\,M(s) \\ &\qquad\qquad \text{für} \quad s \leqq t \leqq 1\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Beim Kragträger mit den Randbedingungen (16e) erhalten wir die Integrationskonstanten nach Einführung der Hilfsgrößen P, Q und N zu

$$C_1 = -C_2 = \frac{-a\left(1-\sqrt{\bar\lambda}\,\alpha\right) P - \sqrt{\bar\lambda}\,\alpha\, Q}{2N},$$

$$C_4 = -\frac{1}{\sqrt{\bar\lambda}\,\alpha}\, C_3 = \frac{a\{P\,\mathfrak{Sin}\,[a] - Q\,\mathfrak{Cof}\,[a]\}}{2N},$$

mit

$$P = \int_0^1 \{\mathfrak{Cof}\,[a(1-t)] - 1\} f(t)\,dt,$$

$$Q = \int_0^1 \{\mathfrak{Sin}\,[a(1-t)] - a(1-t)\} f(t)\,dt,$$

$$N = a\left\{a\left(1-\sqrt{\bar\lambda}\,\alpha\right)\mathfrak{Cof}\,[a] + \sqrt{\bar\lambda}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,[a]\right\}.$$

Daraus folgt mit (15a) und (8b) nach längerer Rechnung die Integralgleichung

$$\varphi(s) = \bar\lambda \int_0^1 K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

mit

$$\left.\begin{aligned} K(s,t) = \Bigg[&\Big\langle \{1-\mathfrak{Cof}\,[a(1-s)]\}\,\mathfrak{Sin}\,[at] + \mathfrak{Sin}\,[as] - \mathfrak{Sin}\,[a] + a(1-s)\,\mathfrak{Cof}\,[a] \Big\rangle \\ &+ \sqrt{\bar\lambda}\,\alpha \Big\langle \Big\{\mathfrak{Cof}\,[a(1-s)] - \frac{1}{a}\,\mathfrak{Sin}\,[a(1-s)] - s\Big\}\,\mathfrak{Sin}\,[at] \\ &+ t\{\mathfrak{Sin}\,[a] - a(1-s)\,\mathfrak{Cof}\,[a] - \mathfrak{Sin}\,[as]\} \Big\rangle \Bigg] \frac{M(s)\,M(t)}{a\left(1-\sqrt{\bar\lambda}\,\alpha\right)\mathfrak{Cof}\,[a] + \sqrt{\bar\lambda}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,[a]} \\ &\text{für } 0 \leqq t \leqq s, \\ K(s,t) = \Bigg[&\Big\langle \{1-\mathfrak{Cof}\,[a(1-t)]\}\,\mathfrak{Sin}\,[as] + \mathfrak{Sin}\,[at] - \mathfrak{Sin}\,[a] + a(1-t)\,\mathfrak{Cof}\,[a] \Big\rangle \\ &+ \sqrt{\bar\lambda}\,\alpha \Big\langle \Big\{\mathfrak{Cof}\,[a(1-t)] - \frac{1}{a}\,\mathfrak{Sin}\,[a(1-t)] - t\Big\}\,\mathfrak{Sin}\,[as] \\ &+ s\{\mathfrak{Sin}\,[a] - a(1-t)\,\mathfrak{Cof}\,[a] - \mathfrak{Sin}\,[at]\} \Big\rangle \Bigg] \frac{M(t)\,M(s)}{a\left(1-\sqrt{\bar\lambda}\,\alpha\right)\mathfrak{Cof}\,[a] + \sqrt{\bar\lambda}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,[a]} \\ &\text{für } s \leqq t \leqq 1. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Mit $M(s) = s$, $M(t) = t$ und $\alpha = 0$ stimmt (18) mit (3.23) der *Deuker*schen Arbeit überein. Für $a \to \infty$ gehen (18) und (19) in (13) über. Da die Randbedingungen (16d) den geringsten Zwang ausüben, liefert (18) die tiefsten Eigenwerte. Dieser Fall ist theoretischer Natur; denn in der Praxis wird man stets versuchen, durch konstruktive Maßnahmen die Flanschen im Einspannquerschnitt an der Verwölbung zu hindern, um dadurch die Kippsicherheit zu erhöhen [siehe (19)].

5. Die erweiterte Grundgleichung. **Nun wollen wir die Kerne der von uns aufgestellten Integralgleichungen für die Fälle abändern, bei denen die Streckenlast q nicht in der Schwerlinie angreift. In (1) muß infolge des oben Gesagten der Term mit ϑ umgeformt werden; es gilt dann [1]**

$$-\frac{1}{a^2}\,\vartheta_{,ssss} + \vartheta_{,ss} + \bar\lambda\left[M^2(s) + \frac{1}{\sqrt{\bar\lambda}}\,\beta\, e(s)\, q(s)\right]\vartheta = 0. \quad (1a)$$

Dabei bedeutet γ^{**} einen dimensionslosen Faktor, durch den eine ausgezeichnete Ordinate q^* im Streckenlast-Diagramm mit dem für den Eigenwert $\bar\lambda$ maßgebenden Biegemoment M^* verbunden ist, $q^* = (M^*/l^2)\,\gamma^{**}$, und $q(s)$ bedeutet den qualitativen, dimensionslosen Verlauf der Streckenlast (z. B. $q(s) = 1$ bei einer Gleichstreckenlast). Es besteht der Zusammenhang

$$q = q^*\, q(s) = \frac{M^*}{l^2}\,\gamma^{**}\, q(s).$$

Ferner ist e^* eine ausgezeichnete Ordinate [cm] im Diagramm des Abstandes der Streckenlast von der Schwerlinie, $e(s)$ der qualitative, dimensionslose Verlauf des Abstandes der Streckenlast

[1] Siehe S. 32 Gl. (D 10) der Arbeit von *Chwalla*.

von der Schwerlinie. Es gilt $e = e^* e(s)$. Schließlich bedeutet $\beta = (e^*/l)\sqrt{B/D}\,\gamma^{**}$ eine dimensionslose Hilfsgröße.

Es ist also in (1) anstelle von $M^2(s)$ der Term $\left[M^2(s) + \left(1/\sqrt{\bar{\lambda}}\right)\beta\, e(s)\, q(s)\right]$ getreten. Die Symmetrisierung der entsprechenden Integralgleichungen erfolgt nun durch Multiplikation von $\vartheta(s)$ mit $\sqrt{M^2(s) + \left(1/\sqrt{\bar{\lambda}}\right)\beta\, e(s)\, q(s)}$ und Einführung von $q(s) = \vartheta(s)\sqrt{M^2(s) + \left(1/\sqrt{\bar{\lambda}}\right)\beta\, e(s)\, q(s)}$. Wir sehen daraus, daß sich die entsprechenden Kerne nur insofern verändern, als anstelle von M der Term $\sqrt{M^2 + \beta\, e\, q/\sqrt{\bar{\lambda}}}$ steht, wobei hier M, e und q von s bzw. t abhängen. Ist $e(s) = 0$, dann gehen die abgeänderten Kerne wieder in die ursprünglichen über.

Alle Integralgleichungen (11), (13), (17), (18) und (19) wurden durch fortgesetzte Differentiationen kontrolliert, die sowohl die Randbedingungen erfüllen als auch die zugehörigen Differentialgleichungen liefern.

6. Die näherungsweise Berechnung der kritischen Kipplasten. In vielen Fällen lassen sich die Eigenwerte der Differentialgleichungen (1) und (2) nicht exakt berechnen, weil es für die Differentialgleichungen keine einfachen Lösungen gibt. Der stets als Lösung für (1) und (2) geltende Potenzreihenansatz

$$\vartheta(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, s^\nu$$

steigert die Arbeit bei der Auswertung der Kippdeterminanten im allgemeinen sehr, so daß seine Anwendbarkeit relativ beschränkt ist. Bei Anwendung des *Ritz*schen Verfahrens zur Näherungsberechnung der Kippwerte ist für jeden Momentenverlauf die Auswertung bestimmter Integrale von meist nicht ganz einfacher Bauart erforderlich. Wegen der großen Rechenarbeit beim Aufstellen der Determinantenkoeffizienten erscheint uns auch dieses Verfahren mit einem großen Rechenaufwand verbunden und daher für numerische Berechnungen bei komplizierteren Randbedingungen weniger empfehlenswert. Dagegen liegt bei Verwendung der Integralgleichungsmethoden[1] die Formel für die Koeffizienten der später noch zu erläuternden Matrix mit dem Vorhandensein der Integralgleichungskernes bereits vor. In den Fällen leicht integrierbarer Kerne ist es angebracht, die *Erhard-Schmidt*sche Ungleichung

$$\bar{\lambda} > \left\{\int_0^1 \int_0^1 [K(s,t)]^2\, dt\, ds\right\}^{-1/2} \tag{20}$$

zu gebrauchen. Man gewinnt mit ihr, wie bekannt, eine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert.

Das Operieren mit (20) ist dann zweckmäßig, wenn die Kerne (11) oder (13) gelten, sich das Biegemoment in Form von Potenzen von s darstellen läßt und der Eigenwert $\bar{\lambda}$ nicht im Kern auftritt [also $\alpha = 0$ in (13), (18) und (19)]. Bei den Integralgleichungen (17), (18) und (19) wird man (20) wegen Integrationsschwierigkeiten nur in Sonderfällen anwenden können. Hier empfiehlt es sich, die Integralgleichung nach *Fredholm* als ein lineares homogenes Gleichungssystem der Stützstellen s_i aufzufassen:

$$\varphi(s_i) = \bar{\lambda} \sum_{\nu=0}^{p} K(s_i, t_\nu)\, \varphi(t_\nu)\, \frac{1}{p} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots p) \tag{21}$$

Mit $\lambda = p/\bar{\lambda}$ kann man (21) in Form eines speziellen Matrizeneigenwertproblems

$$(\mathfrak{N} - \lambda\, \mathfrak{E})\, \mathfrak{x} = 0 \tag{22}$$

schreiben. Dabei sind die Komponenten des Vektors $\mathfrak{x}$ gleich den Näherungswerten der gesuchten Eigenfunktion φ an den Stützstellen s_i, und $\mathfrak{E}$ ist die Einheitsmatrix und $\mathfrak{N}$ die Kernmatrix. Das Verschwinden der Nennerdeterminante des homogenen Gleichungssystems (22) stellt die Kippbedingung dar. Die λ-Werte lassen sich mit Hilfe des „Matrizen-Iterationsverfahrens“ oder des *Hessenberg*-Verfahrens[2] aus (22) ermitteln. Bei dem unten errechneten, ersten Beispiel zeigte sich, daß man alle Eigenwerte zum Beispiel mit Hilfe des Matrizen-Iterationsverfahrens finden kann, wenn man mit geeigneten Ansätzen für die Eigenfunktionen φ in die Rechnung eingeht. Ferner stellt hierbei der *Rayleigh*-Quotient keine obere Schranke dar, sondern nähert den Eigenwert von unten. Dies hat seinen Grund darin, daß (22) durch die Umwandlung eines Integrals in eine Summe

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 2.
[2] *R. Zurmühl*, Praktische Mathematik, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.

entsteht. Hingegen führt das *Ritz*-Verfahren (Energiemethode) auf das allgemeine Matrizen-Eigenwertproblem

$$(\mathfrak{A} - \lambda\, \mathfrak{B})\, \mathfrak{x} = 0\,. \tag{23}$$

Dabei stellt $\mathfrak{B}$ günstigstenfalls eine Diagonalmatrix dar. Die Vorteile der Integralgleichungsmethoden gegenüber dem *Ritz*-Verfahren fassen wir in den vier wesentlichen Tatsachen zusammen:

1. Die Iteration des speziellen Matrizen-Eigenwertproblems ist mit weniger Rechenaufwand verbunden.

2. Wie oben ausgeführt, ist mit Aufstellung des Kernes bereits die Koeffizientenformel für $\mathfrak{A}$ gegeben.

3. Man umgeht das beim *Ritz*-Verfahren notwendige Aufsuchen eines passenden, den tatsächlichen Kurvenverlauf gut beschreibenden Näherungsansatzes, was bei komplizierteren Randbedingungen auf Schwierigkeiten stößt.

4. Für Integralgleichungen stehen Verfahren bereit, mit denen man die $\bar{\lambda}$-Werte nach oben und unten einschränken kann[1].

Tritt jedoch der Eigenwert im Kern der Integralgleichung auf, wie etwa in (13), (18) oder (19), versagen die oben geschilderten, nur auf lineare Eigenwertprobleme anwendbaren Näherungsverfahren. Wir schlagen in diesem Falle das folgende Verfahren zur Ermittlung der Eigenwerte vor: Für diskrete $\bar{\lambda}$ bzw. λ berechnet man die zugehörigen Werte ΔN der Nennerdeterminante von (22) und trägt sie in einem $(\Delta N, \bar{\lambda})$-Diagramm auf. Diejenigen $\bar{\lambda}$-Werte, für welche die zugehörigen ΔN-Werte die Größe Null annehmen, gewinnt man näherungsweise durch Ablesen und schärfer durch lineare oder quadratische Interpolation. Die so gefundenen $\bar{\lambda}$-Werte stellen die näherungsweise ermittelten Eigenwerte der Integralgleichung dar.

7. Erstes Beispiel. Abschließend möge nun die Berechnung der Eigenwerte einiger einfacherer Fälle die oben gewonnenen Erkenntnisse veranschaulichen.

a) Untere Schranken für die Kippwerte nach der Integralgleichungsmethode. Als erstes Beispiel berechnen wir nach (11) und (20) näherungsweise den tiefsten Eigenwert für einen Balken auf zwei Stützen mit Rechteckquerschnitt, der durch zwei voneinander verschiedene Endmomente belast ist (Abb. 1).

Abb. 1. Systemskizze für Beispiel 1.

Das Biegemoment ist

$$M = M_2 \left[\frac{M_1}{M_2} + \left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right) s\right].$$

Der Kern hat die Bauart

$$K(s,t) = \left[\frac{M_1}{M_2} + \left(1 - 2\,\frac{M_1}{M_2}\right) s - \left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right) s^2\right]\left[\frac{M_1}{M_2}\, t + \left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right) t^2\right] \qquad \text{für } 0 \leqq t \leqq s\,,$$

$$K(s,t) = \left[\frac{M_1}{M_2} + \left(1 - 2\,\frac{M_1}{M_2}\right) t - \left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right) t^2\right]\left[\frac{M_1}{M_2}\, s + \left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right) s^2\right] \qquad \text{für } s \leqq t \leqq 1\,.$$

Ferner ist

$$\bar{\lambda} = \frac{(M_2\, l)^2}{B\, D}\,.$$

Zieht man in der Integralgleichung $(M_1/M_2)^2$ aus dem Kern, dann ist der Eigenwert

$$\lambda = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2 \bar{\lambda} = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2 \frac{(M_2\, l)^2}{B\, D}\,,$$

und der Kern schreibt sich wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} K(s,t) &= (1 + m\, s + n\, s^2)\,(t - n\, t^2) \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq s\,, \\ K(s,t) &= (1 + m\, t + n\, t^2)\,(s - n\, s^2) \quad \text{für} \quad s \leqq t \leqq 1\,, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

mit

$$m = \frac{1 - 2\, M_1/M_2}{M_1/M_2} \quad \text{und} \quad n = \frac{M_1/M_2 - 1}{M_1/M_2}\,.$$

[1] Als eine ähnliche Anwendung der Integralgleichungsmethode sei hier auf *K. Karas*, Eigenschwingungen von Saiten mit elastisch befestigten Enden, Federhofer-Girkmann-Festschrift S. 37, Wien 1950; und Österr. Ing.-Arch. 9 (1955) S. 352, verwiesen.

Das Doppelintegral wird nach längerer Rechnung

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 [K(s,t)]^2\,dt\,ds &= \int_0^1\left\{\int_0^s [K(s,t)]^2\,dt + \int_s^1 [K(s,t)]^2\,dt\right\} ds\\ &= \frac{1}{6300}\,(1050 + 1680\,m + 700\,m^2 - 900\,m\,n\\ &\quad - 900\,m^2\,n + 140\,n - 855\,m\,n^2 + 315\,m^2\,n^2\\ &\quad - 855\,n^2 - 70\,n^3 + 252\,n^4 + 560\,m\,n^3)\,.\end{aligned}\right\} \tag{24a}$$

Daraus berechnet sich das kritische Moment M_2 zu

$$M_2 = \frac{\sqrt{B\,D}}{l}\,\frac{\sqrt[4]{6300}}{\sqrt[4]{\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^4 [1050 + 1680\,\mathrm{m} + \cdots]}}\,. \tag{25}$$

Der Inhalt der eckigen Klammer ist wegen seiner Länge in (25) nur angedeutet und mit dem der eckigen Klammer in (24a) identisch.

Als Sonderfälle betrachten wir

1. $M_1 = M_2$, somit $m = -1$ und $n = 0$. Es ergibt sich $M_2 = 3{,}0801\,\sqrt{BD}/l$. Der Fehler von 3,0801 gegenüber dem exakten Wert π beträgt 1,96%.

2. $M_1 = 0$. Unter der Wurzel in (25) verbleiben nur die Terme, die in m und n biquadratisch sind

$$\frac{\sqrt[4]{6300}}{\sqrt[4]{315 + 252 - 560}} = 5{,}4772\,.$$

Wir bekommen $M_2 = 5{,}4772\,\sqrt{BD}/l$. Der Fehler von 5,4772 gegenüber dem exakten Wert 5,5618 beträgt 1,52%.

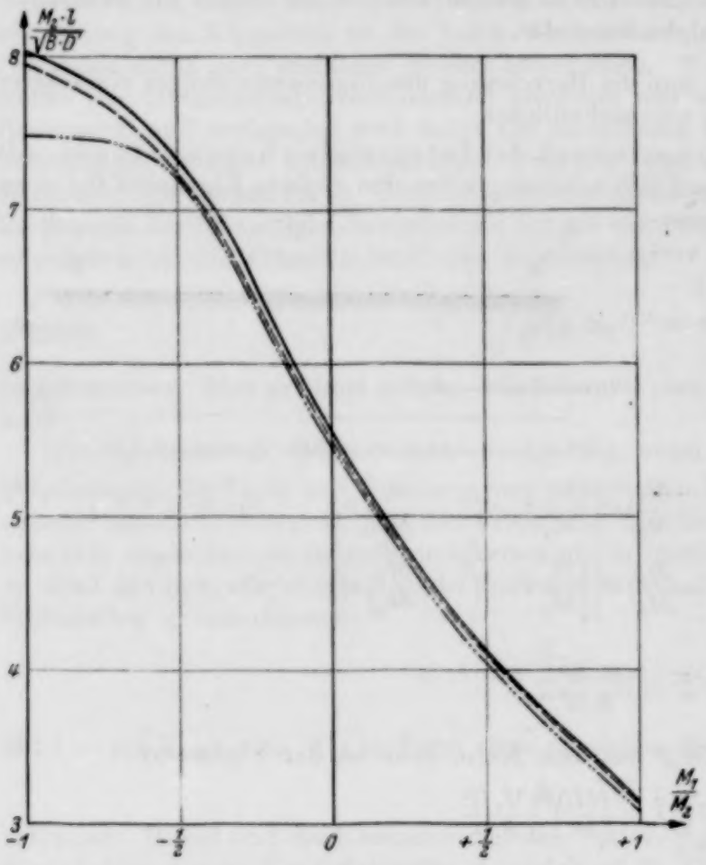


Abb. 2. Beispiel 1, Kippwertverlauf.

——— Kippwertverlauf gemäß (32a);
— — — „ „ (21);
—·—·— „ „ (25).

In Abb. 2 ist $M_2 l/\sqrt{BD}$ aus (25) über M_1/M_2 aufgetragen. Für die Verhältnisse $M_1/M_2 = +1,\ +1/2,\ 0,\ -1/2$ und -1 wurden aus Vergleichsgründen die Kippwerte gemäß (21) mit 4- und 9-reihigen Matrizen berechnet. Die damit gleichzeitig erhaltenen Näherungen für den Verlauf des Drillwinkels sind in Abb. 3 dargestellt.

b) Obere Schranken für die Kippwerte nach der Energiemethode. Zur Gewinnung oberer Schranken für die näherungsweise berechneten Kippwerte wollen wir nun die Energiemethode heranziehen. Mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{M_1/M_2}{1 - M_1/M_2} = -\frac{1}{n}\,,\\ M &= M_2\,(1 - M_1/M_2)\,(s + b)\,,\\ \lambda &= \frac{1}{B\,D}\,[M_2\,l\,(1 - M_1/M_2)]^2\,,\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

schreibt sich die Differentialgleichung (2)

$$\vartheta_{ss} + \lambda\,(s + b)^2\,\vartheta = 0\,. \tag{27}$$

Durch Multiplizieren von (27) mit $\vartheta/2$ und nachfolgendes partielles Integrieren in den Grenzen von 0 bis 1 unter Beachtung von $\vartheta_{(0)} = \vartheta_{(1)} = 0$ erhalten wir bekanntlich den Energieausdruck Π zu

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^1 [(\vartheta_s)^2 - \lambda\,(s + b)^2\,\vartheta^2]\,ds = 0\,.$$

Nach Einführung des die Randbedingungen befriedigenden Näherungsansatzes

$$\vartheta(s) = \sum_m a \sin(m \pi s)$$

drückt sich das Verschwinden der ersten Variation von II folgendermaßen aus

$$\delta II = \sum_m \frac{\partial II}{\partial a_m} \delta a_m = \sum_m \left\{ \int_0^1 \left[\vartheta, \frac{\partial \vartheta_{,s}}{\partial a_m} - \lambda (s+b)^2 \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial a_m} \right] ds \right\} \delta a_m = 0 .$$

Daraus folgt beim Weglassen der Zwischenrechnungen das in a_m homogene Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} &[A_m - k^* m^2]\, a_m + \sum_{\substack{n \\ (n \neq m)}} B_{mn}\, a_n = 0 , \\ &k^* = \frac{6\pi^4}{\lambda} , \\ &A_m = \frac{2 m^2 \pi^2 - 3}{m^2} + 6 \pi^2 b (1+b) , \\ &B_{mn} = +48 \frac{m n}{(m^2 - n^2)^2} \qquad \text{für } m+n \text{ gerade} , \\ &B_{mn} = -48 \frac{m n}{(m^2 - n^2)^2} (1+2b) \quad \text{für } m+n \text{ ungerade} . \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

mit[1]

Die Forderung, daß die Nennerdeterminante von (28) verschwinden muß, liefert die obere Schranke für die Kippwerte. Die Rechnung zeigt, daß bei $M_1/M_2 \geqq 0$ ein Näherungsansatz für ϑ mit $m = 1$ und 2 Eigenwerte ergibt, die um weniger als 1% von den exakten Werten abweichen. Bei $M_1/M_2 = -1$ zerfällt die Matrix (28) wegen $(1+2b) = 0$ in zwei Teilmatrizen. Diejenige mit ungeradem m liefert bei einem zur Achse $s = 1/2$ symmetrischen Drillwinkelverlauf den tiefsten Eigenwert (ein 3-gliedriger Ansatz ergibt eine Abweichung von 0,02%). Die Teilmatrix mit geradem m gilt für den zur Achse $s = 1/2$ antimetrischen Drillwinkelverlauf. Ihr kleinster Eigenwert ist größer als der aus der ersten Teilmatrix gewonnene. Bei $M_1/M_2 = -1/2$ beträgt der Fehler des aus einer 4-reihigen Matrix berechneten Näherungswertes gegenüber dem genauen Wert 0,06%.

c) Die strengen Kippwerte. Um ein Bild von der Güte der oben auf mehreren Wegen erhaltenen Näherungsergebnisse zu bekommen, mögen nun abschließend für die oben behandelten Verhältnisse M_1/M_2 die Kippwerte durch exakte Lösung der Differentialgleichung (27) berechnet werden.

Nach Substitution von $z = (s + b)$ wandelt sich (27) um in

$$\vartheta_{zz} + \lambda z^2 \vartheta = 0 . \tag{29}$$

Für das Verhältnis $M_1/M_2 = 1$, somit $M =$ konstant, ergibt die Lösung von (2) für ϑ mit Beachtung der Randbedingungen (9) sofort den trigonometrischen Sinus mit dem kleinsten Eigenwert π, so daß in diesem Falle nicht auf die Lösung durch *Bessel*-Funktionen zurückgegriffen zu werden braucht[2].

Die Randbedingungen für (29) lauten gemäß (9)

$$\left.\begin{aligned} \vartheta = 0 \quad &\text{für } z_1 = b , \\ \vartheta = 0 \quad &\text{für } z_2 = 1 + b . \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Für die oben notierten Verhältnisse folgt mit Beachtung von (26) und (30)

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} \quad z_1 = b = 1 \quad \text{und } z_2 = 2 \quad \text{für } \frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{2} , \\ &\text{b)} \quad z_1 = b = 0 \quad \text{und } z_2 = 1 \quad \text{für } \frac{M_1}{M_2} = 0 , \\ &\text{c)} \quad z_1 = b = -\frac{1}{3} \text{ und } z_2 = \frac{2}{3} \text{ für } \frac{M_1}{M_2} = -\frac{1}{2} , \\ &\text{d)} \quad z_1 = b = -\frac{1}{2} \text{ und } z_2 = \frac{1}{2} \text{ für } \frac{M_1}{M_2} = -1 . \end{aligned}\right\} \tag{30a}$$

[1] Verwechslungen mit den in (24) eingeführten Abkürzungen m und n sind hier wohl nicht zu befürchten.
[2] Siehe S. 24 Gl. (C 38) der Arbeit von *Chwalla*, wobei dort $\beta = 0$ und $D = 0$ gesetzt werden müssen.

Die Lösung der Differentialgleichung (29) erhält man mit Hilfe der *Lommel*-Transformation[1]

$$\vartheta(z) = \sqrt{z}\left[C_1 J_{1/4}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2} z^2\right) + C_2 J_{-1/4}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2} z^2\right)\right], \tag{31}$$

wo C_1 und C_2 die aus den Randbedingungen (30) zu bestimmenden Integrationskonstanten darstellen. Das Einarbeiten der Randbedingungen (30) liefert zwei homogene und lineare Gleichungen in C_1 und C_2. Durch Nullsetzen ihrer Nennerdeterminante

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{(-)}\sqrt{b}\, J_{1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2} b^2\right] & \sqrt{b}\, J_{-1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2} b^2\right] \\ \sqrt{1+b}\, J_{1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(1+b)^2\right] & \sqrt{1+b}\, J_{-1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(1+b)^2\right] \end{vmatrix} \tag{32}$$

erhalten wir bekanntlich die Kippbedingung. Für $M_1/M_2 > 0$ kann man die Wurzeln $\sqrt{b}$ und $\sqrt{1+b}$ ohne weiteres aus (32) herausziehen.

Die Kippbedingung lautet dann[2]

$$J_{1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2} b^2\right] J_{-1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(1+b)^2\right] = \underset{(-)}{+} J_{1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(1+b)^2\right] J_{-1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2} b^2\right]. \tag{32a}$$

Dagegen erfordert der Bereich $M_1/M_2 \leqq 0$ eine gesonderte Betrachtung: Wir übersehen den Verlauf von $\vartheta(z)$ sofort, wenn wir die ersten Glieder der mit $\sqrt{z}$ multiplizierten *Bessel*-Funktionen von der Ordnung $+1/4$ und $-1/4$ in (31) explizit niederschreiben:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta(z) = C_1 &\left[\frac{\lambda^{1/8}}{\sqrt{2}\,\Gamma(5/4)} z - \frac{\lambda^{9/8}}{2^{9/2}\,\Gamma(2)\,\Gamma(9/4)} z^5 + - \cdots\right] \\ + C_2 &\left[\frac{\sqrt{2}}{\lambda^{1/8}\,\Gamma(3/4)} - \frac{\lambda^{7/8}}{2^{7/2}\,\Gamma(2)\,\Gamma(7/4)} z^4 + - \cdots\right]. \end{aligned}\right\} \tag{31a}$$

In (31a) beschreibt die mit C_1 multiplizierte unendliche Reihe eine zur $(z = 0)$-Achse antimetrische und die mit C_2 multiplizierte unendliche Reihe eine zur $(z = 0)$-Achse symmetrische Funktion. Somit gilt

$$\sqrt{-z}\, J_{1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(-z)^2\right] = -\sqrt{+z}\, J_{1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(+z)^2\right],$$

$$\sqrt{-z}\, J_{-1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(-z)^2\right] = +\sqrt{+z}\, J_{-1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(+z)^2\right].$$

Deswegen müssen in (32) und in (32a) für den Bereich $-1 < M_1/M_2 < 0$ die dort in Klammern angedeuteten Minuszeichen stehen.

Für $M_1/M_2 = 0$ folgt aus (30a) und (31a)

$$C_2 = 0,$$

und der kleinste Kippwert ergibt sich nach *Prandtl* zum doppelten Wert der ersten Nullstelle der *Bessel*-Funktion von der Ordnung $+1/4$

$$\frac{M_2 l}{\sqrt{B D}} = 5{,}5618.$$

Für $M_1/M_2 = -1$ liefern (30) und (30a)

$$b^2 = (1+b)^2,$$

und (32a) unter Beachtung des dort eingeklammerten Minuszeichens

$$J_{1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2} b^2\right] J_{-1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2} b^2\right] = 0. \tag{32b}$$

Durch Nullsetzen von $J_{-1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2} b^2\right]$ in (32b) erhalten wir den kleinsten Kippwert, und damit folgt aus dem (32) zugeordneten, in C_1 und C_2 homogenen Gleichungssystem $C_1 = 0$. Der kleinste

[1] *R. Rothe* u. *I. Szabo*, Höhere Mathematik Teil VI, S. 143—169, Stuttgart 1953.

[2] Das Auswerten von (32a) geschah mit Hilfe des Buches Tables of Bessel Functions of Fractional Order Vol. I, New York 1948. Dieses Tabellenwerk stellte das Institut für Praktische Mathematik (Prof. Dr. *A. Walther*), T. H. Darmstadt, dem Verfasser entgegenkommend zur Verfügung.

Kippwert ergibt sich somit zum 4-fachen Wert der ersten Nullstelle der *Bessel*-Funktion von der Ordnung —1/4

$$\frac{M_2\, l}{\sqrt{B\,D}} = 8{,}0252\,.$$

Die Zusammenstellung der oben auf verschiedenen Wegen erhaltenen tiefsten Kippwerte ist in der beigefügten Tabelle 1 zu finden. Die eingeklammerten Zahlenwerte stellen die prozentuale Abweichung vom exakten Wert dar.

Tabelle 1. *Zusammenstellung der berechneten Kippwerte* $\frac{M_2\, l}{\sqrt{B\,D}}$

M_1/M_2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$
exakte Werte gemäß (32a)	8,0252	7,3241	5,5618	4,1207	π
Näh.-Werte mit $p = 5$ gemäß (21)	7,8627 (2,03)	7,1100 (2,92)	5,4369 (2,25)	4,0490 (1,74)	3,0902 (1,64)
Näh.-Werte mit $p = 10$ gemäß (21)	7,9511 (0,92)	7,2581 (0,90)	5,5288 (0,59)	4,1026 (0,44)	3,1287 (0,41)
untere Schranken gemäß (25)	7,4917 (6,65)	7,2246 (1,36)	5,4772 (1,52)	4,0437 (1,87)	3,0801 (1,96)
obere Schranken gemäß (28)	8,0265 (0,02)	7,3282 (0,06)	5,5804 (0,33)	4,1211 (0,01)	π (0)

d) Die Berechnung der Verformungen. Der genaue Drillwinkelverlauf für $M_1/M_2 \neq 1$, —1 und 0 lautet mit der stets bei Eigenwertproblemen auftretenden willkürlichen Konstanten $\bar{\bar{K}} = C_1$

$$\vartheta(z) = \bar{\bar{K}}\sqrt{z}\left\{J_{1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}z^2\right] - \frac{J_{1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(1+b)^2\right]}{J_{-1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(1+b)^2\right]}\,J_{-1/4}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}z^2\right]\right\}. \tag{31b}$$

Für $M_1/M_2 = 1$ ist, wie nach (29) erläutert wurde, eine Halbwelle des trigonometrischen Sinus die erste Eigenfunktion. Für $M_1/M_2 = 0$ wird die erste Eigenfunktion durch die „erste Halbwelle" der zur Achse $z = 0$ antimetrischen, in (31a) mit C_1 multiplizierten Funktion, hingegen für $M_1/M_2 = -1$ durch die „erste Halbwelle" der zur Achse $z = 0$ symmetrischen, mit C_2 multiplizierten Funktion dargestellt.

Für die untersuchten Verhältnisse M_1/M_2 sind die ersten Eigenfunktionen mit den zugehörigen Näherungen des Drillwinkelverlaufes in Abb. 3 aufgetragen. Der Unterschied zwischen den exakt berechneten Eigenfunktionen und den aus 9-reihigen Matrizen berechneten Näherungen ist bei der zur Verfügung stehenden Zeichengenauigkeit nicht mehr erkenntlich. Die strichpunktierte und die ausgezogene Linie fallen daher in Abb. 3 zusammen. Die Durchbiegungen w in Richtung der Minimumträgheitsachse ergeben sich nach der Kipptheorie durch Integration von

$$w_{xx} = -\frac{M(x)}{E\,J_{max}} \tag{33}$$

unter Beachtung der Randbedingungen $w(0) = w(l) = 0$ für unser Beispiel exakt zu

$$w = \frac{M_2\, l^2}{6\,E\,J_{max}}\left[\left(\frac{M_1}{M_2}\right)\omega_D' + \omega_D\right], \tag{33a}$$

wo ω_D' und ω_D die Abkürzungen für die folgenden Funktionen bedeuten:

$$\omega_D' = 2\,s - 3\,s^2 + s^3 \quad \text{und} \quad \omega_D = s\,(1 - s^2)\,.$$

Die Durchbiegungen u in Richtung der Maximumträgheitsachse lassen sich aus der Formel[1]

$$u_{xx} = +\frac{M(x)\,\vartheta(x)}{E\,J_{min}} \tag{34}$$

[1] Siehe S. 9 Gl. (A 23) der Arbeit von *Chwalla*.

mit $u(0) = u(l) = 0$ bestimmen. Dies geschieht am besten näherungsweise nach den baustatischen Methoden entweder graphisch durch Zeichnen eines geeignet verzerrten Seilpolygons für einen Träger auf 2 Stützen mit einer Streckenlast von der Intensität $\psi(x) = -M(x)\,\vartheta(x)/E\,J_{min}$ oder analytisch mit Hilfe der $\mathfrak{W}$-Gewichte. Die Diagramme für w und u des behandelten Beispieles sind der Vollständigkeit und Anschauung wegen in Abb. 4 aufgezeichnet.

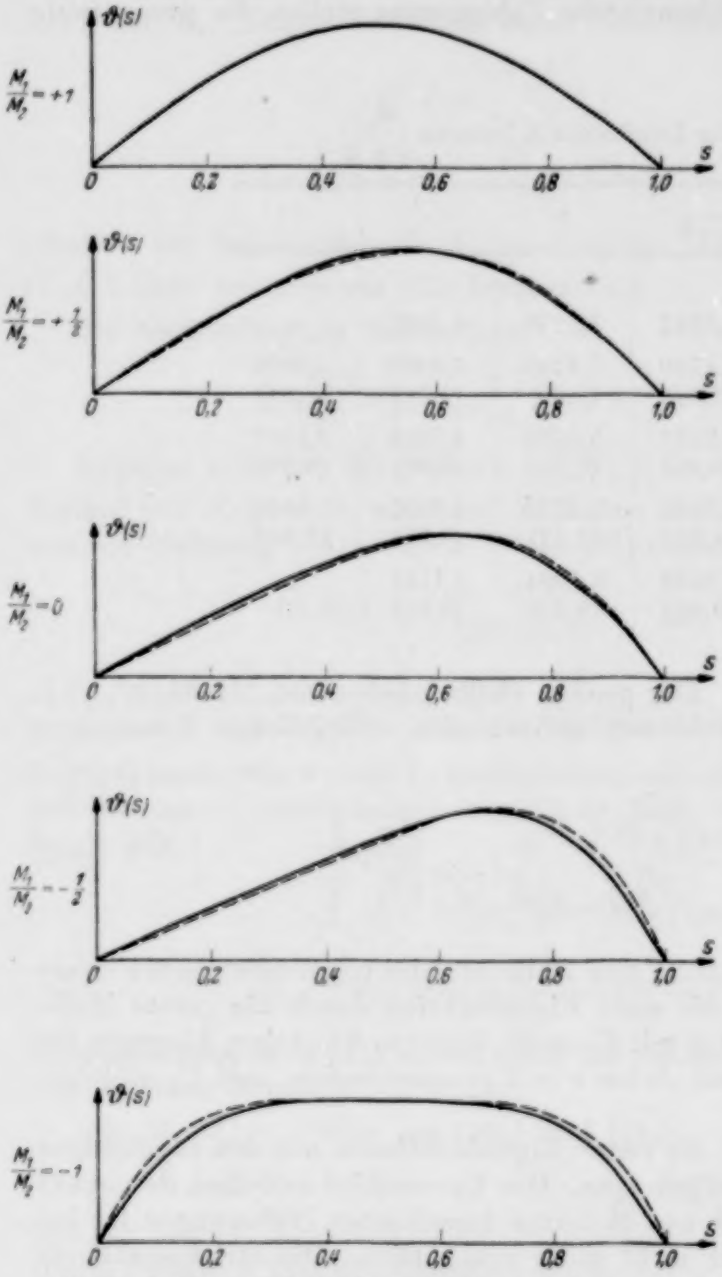


Abb. 3. Beispiel 1, Drillwinkelverlauf, näherungsweise aus 4- und 9-reihigen Matrizen und exakt.

— — — ϑ aus 4-reihiger Matrix gemäß (21) und (24);

ϑ aus 9-reihiger Matrix gemäß (21) und (24);

—·· —·· — ϑ exakt gemäß (31).

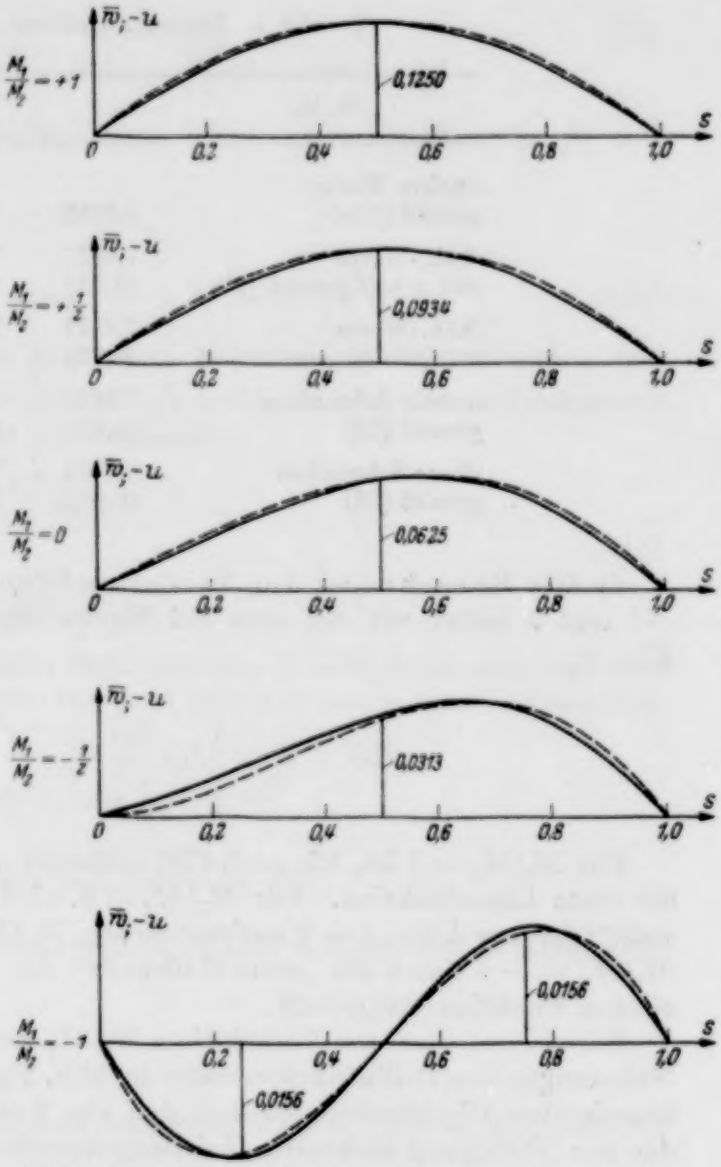


Abb. 4. Beispiel 1, Verlauf von w exakt und von u näherungsweise mit $\mathfrak{W}$-Gewichten.

— — — — $\bar{w} = w \cdot \dfrac{E\,J_{max}}{M_2 \cdot l^2}$ gemäß (33a);

u gemäß (34).

8. Zweites Beispiel. Als zweites Beispiel berechnen wir den kritischen Kippwert einer Last P, die am Ende eines Kragträgers mit Rechteckquerschnitt sitzt und zuerst im Schwerpunkt des Endquerschnittes angreift[1].

a) Untere Schranken für die Kippwerte nach der Integralgleichungsmethode. Es ist

$$M(s) = s\,,$$

und es gilt (13) mit $\varkappa = 0$. Das Doppelintegral des Kernquadrates in (20) hat den Wert

$$\int_0^1 \int_0^1 [K(s,t)]^2\,dt\,ds = \int_0^1 \left\{ \int_0^s [(s - s^2)\,t]^2\,dt + \int_s^1 [(t - t^2)\,s]^2\,dt \right\} ds = \frac{1}{252}\,.$$

Somit ist $P = 3{,}9843\,\sqrt{BD}/l^2$ gegenüber $4{,}0126\,\sqrt{BD}/l^2$ der exakten Lösung (0,71% Fehler).

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 1.

Greift die Last P ober- oder unterhalb des Schwerpunktes des Endquerschnittes an, dann gilt (13) mit $M(s) = s$ und $\alpha \neq 0$. Der Eigenwert $\bar{\lambda}$ tritt nun auch im Kern der Integralgleichung auf. Für verschiedene Werte α wurden die zugehörigen kleinsten Eigenwerte aus 4-reihigen Matrizen gemäß (22) nach dem oben vorgeschlagenen Verfahren berechnet und in Tabelle 2 zusammengestellt. Für $\alpha \to \infty$ lautet der Kern von (13)

$$K(s,t) = t\,(1-s)\,s\,t \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq s\,,$$
$$K(s,t) = s\,(1-t)\,t\,s \quad \text{für} \quad s \leqq t \leqq 1\,.$$

Hierbei, sowie in dem Falle $\alpha = 0$, läßt sich das Matrizen-Iterationsverfahren anwenden. Während man für $\alpha = -\infty$ auf diese Weise auch den tiefsten Eigenwert gewinnen kann, liefert dasselbe Verfahren für $\alpha = +\infty$ nur die höheren Eigenwerte. Das liegt daran, daß die Integralgleichung und die zugehörige Differentialgleichung für den ersten Eigenwert entartet. Wie unten ausgeführt wird, ist im Falle $\alpha = +\infty$ der tiefste Eigenwert $\bar{\lambda}$ gleich Null, und das unbestimmte Produkt $\sqrt{\bar{\lambda}}\,\alpha = 0 \cdot \infty$ nimmt den Wert 1 an. Für die Fälle $\alpha = -\infty$, $-0{,}5182$, 0 und $+0{,}4254$ sind die aus 4-reihigen Matrizen ermittelten Näherungen für den Drillwinkelverlauf in Abb. 6 dargestellt.

b) Die strengen Kippwerte und die zugehörigen Verformungen. Um die Schärfe der oben erwähnten, näherungsweise berechneten Eigenwerte zu erkennen, wird nun die strenge Kippgleichung hergeleitet und ausgewertet. Mit dem Eigenwert

$$\bar{\lambda} = \lambda = \frac{(P\,l^2)^2}{B\,D}$$

und der Koordinate $z = s$ ist die Kipp-Differentialgleichung durch (29) und ihre Lösung durch (31) bzw. (31a) gegeben. Die zugehörigen Randbedingungen sind in (10) verzeichnet. Diejenige an der Stelle $z = 0$ liefert unter Beachtung von (31a)

$$C_1 \frac{\Gamma(3/4)}{2\,\varkappa\,\Gamma(5/4)} + C_2\,\lambda^{1/4} = 0 \tag{35}$$

und diejenige an der Stelle $z = 1$ unter Beachtung von (31)

$$C_1\,J_{1/4}\left(\frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{2}\right) + C_2\,J_{-1/4}\left(\frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{2}\right) = 0\,. \tag{36}$$

Die Forderung, daß die Nennerdeterminante des durch (35) und (36) gebildeten, homogenen und in C_1 und C_2 linearen Gleichungssystems für nichttriviale, von Null verschiedene Lösungen verschwinden muß, führt auf die strenge Kippgleichung

$$\frac{1}{\alpha} = 2^{3/2}\,\frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)}\sqrt{\frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{2}}\,\frac{J_{1/4}\left(\frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{2}\right)}{J_{-1/4}\left(\frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{2}\right)}\,. \tag{37}$$

Daraus folgt mit $\Gamma(3/4) = 1{,}225417$, $\Gamma(5/4) = 0{,}906403$ und der Abkürzung $\sqrt{\bar{\lambda}}/2 = \varkappa$

$$\frac{1}{\alpha} = 2{,}092099\,\sqrt{\varkappa}\,\frac{J_{1/4}(\varkappa)}{J_{-1/4}(\varkappa)}\,. \tag{37a}$$

Die aus (37) berechneten, zu gewählten $\sqrt{\bar{\lambda}}$-Werten gehörigen Werte α findet man in Tabelle 2 (erster, zweiter und dritter Eigenwert). Für einen Wert $\sqrt{\bar{\lambda}}$, welcher mit dem ihm entsprechenden Wert α durch (37) verbunden ist, ergibt sich aus (36) das Verhältnis der Integrationskonstanten. Der Drillwinkelverlauf lautet dann gemäß (31) mit der nicht bestimmbaren Konstanten C_1

$$\vartheta(z) = C_1\sqrt{z}\left[J_{1/4}\left(\frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{2}\,z^2\right) - \frac{J_{1/4}\left(\frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{2}\right)}{J_{-1/4}\left(\frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{2}\right)}\,J_{-1/4}\left(\frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{2}\,z^2\right)\right]. \tag{38}$$

Für $\alpha = 0$ vereinfacht sich (37) zu der schon von *Prandtl* berechneten Gleichung

$$J_{-1/4}\left(\frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{2}\right) = 0\,, \tag{37b}$$

Tabelle 2. *Zusammenstellung der in Abhängigkeit von* $\alpha = \frac{e_P}{l}\sqrt{\frac{B}{D}}$ *berechneten ersten, zweiten und dritten Kippwerte* $\sqrt{\bar{\lambda}} = \frac{P\,l^2}{\sqrt{B\,D}}$

α	$\sqrt{\bar{\lambda}_1}$ (exakt) gemäß (37)	$\sqrt{\bar{\lambda}_1}$ (näh.w.) gemäß (21)	Fehler in %	α	$\sqrt{\bar{\lambda}_2}$ (exakt) gemäß (37)	α	$\sqrt{\bar{\lambda}_3}$ (exakt) gemäß (37)
∞	0			∞	5,5618	∞	11,8123
19,9984	0,05			10,6588	5,6	3,2878	11,9
9,9963	0,1			3,0628	5,7	1,6001	12,0
4,9933	0,2	0,2000	0	1,8400	5,8	0,3283	13,0
1,9832	0,5	0,5000	0	1,0626	6,0	0,1934	14,0
0,9658	1,0	1,0000	0	0,3845	7,0	0,1202	15,0
0,4254	2,0	1,9991	0,05	0,2293	8,0	0,0500	16,0
0,2004	3,0	2,9909	0,30	0,1335	9,0	0	16,5159
0,0031	4,0			0,0334	10,0	−0,0762	17,0
0	4,0126	3,9755	0,93	0	10,2461	−0,3463	17,6
−0,5182	5,0	4,9101	1,80	−0,1898	11,0	−0,4690	17,7
−0,9236	5,2			−0,7520	11,5	−0,6761	17,8
−1,3524	5,3			−1,1734	11,6	−1,1051	17,9
−2,3043	5,4			−2,3402	11,7	−2,5406	18,0
−6,3234	5,5	5,3751	2,20	−22,4440	11,8	−3,9922	18,03
$-\infty$	5,5618	5,4369	2,25	$-\infty$	11,8123	$-\infty$	18,0848

mit den Nullstellen $\sqrt{\bar{\lambda}} = 4{,}0126,\ 10{,}2461,\ 16{,}5159, \ldots$ Gleichung (36) liefert $C_1 = 0$, und der Drillwinkelverlauf wird

$$\vartheta(z) = C_2 \sqrt{z}\, J_{-1/4}\left(\frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{2} z^2\right). \tag{38a}$$

Für $\alpha = +\infty$ werden in (37) die beiden *Bessel*-Funktionen durch unendliche Reihen (Potenzreihen in $\bar{\lambda}$) ausgedrückt [siehe (31a)]. Durch Umformung ergibt sich dann aus (37)

$$\sqrt{\bar{\lambda}}\,\frac{\left[1 - \frac{\bar{\lambda}\,\Gamma(5/4)}{2^4\,\Gamma(2)\,\Gamma(9/4)} + - \ldots\right]}{\left[1 - \frac{\bar{\lambda}\,\Gamma(3/4)}{2^4\,\Gamma(2)\,\Gamma(9/4)} + - \ldots\right]} = \lim_{\alpha \to \pm\infty} \frac{1}{\alpha} = 0. \tag{37c}$$

Gleichung (37c) ist erstens erfüllt, wenn nach dem Grenzübergang $\alpha \to \pm\infty$ die Klammer des Zählers verschwindet. Das ist für solche $\sqrt{\bar{\lambda}}$ der Fall, die der Gleichung

$$J_{1/4}\left(\frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{2}\right) = 0$$

genügen, wobei deren erste Nullstelle $\sqrt{\bar{\lambda}} = 0$ ausgeschlossen ist

$$\sqrt{\bar{\lambda}} = 5{,}5618,\quad 11{,}8123,\quad 18{,}0848, \ldots$$

Gleichung (36) liefert $C_2 = 0$, und der Drillwinkelverlauf wird

$$\vartheta(z) = C_1 \sqrt{z}\, J_{1/4}\left(\frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{2} z^2\right). \tag{38b}$$

Gleichung (37c) ist jedoch zweitens auch für $\sqrt{\bar{\lambda}} = 0$ und $\sqrt{\bar{\lambda}}\,\alpha = 1$ erfüllt. Das ist sofort einzusehen, wenn vor dem Grenzübergang (37c) mit α multipliziert, $\bar{\lambda}$ in den eckigen Klammern Null gesetzt und nach dem Produkt $\sqrt{\bar{\lambda}}\,\alpha$ aufgelöst wird. Um bei der Errechnung des Verhältnisses C_1/C_2 der Bestimmung von Grenzwerten unbestimmter Ausdrücke zu entgehen, werden die neuen Konstanten $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_2$ so gewählt, daß in den eckigen Klammern von (31a) nur ganzzahlige Potenzen von $\bar{\lambda}$ auftreten

$$\bar{C}_1 = \frac{\bar{\lambda}^{1/8}}{\sqrt{2}\,\Gamma(5/4)}\,C_1 \quad \text{und} \quad \bar{C}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\bar{\lambda}^{1/8}\,\Gamma(3/4)}\,C_2.$$

Mit $\bar{\lambda} = 0$ aus (37c), sowie $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_2$ lautet der Drillwinkelverlauf nach (31a)

$$\vartheta = \bar{C}_1\, z + \bar{C}_2.$$

Die Randbedingungen (10) liefern $\bar{C}_1 = -\bar{C}_2$ und $\sqrt{\bar{\lambda}}\,\alpha = 1$, somit

$$\vartheta = \bar{C}_2\,(1 - z)\,. \tag{38c}$$

Der tiefste Eigenwert $\sqrt{\bar{\lambda}} = 0$ für $\alpha = +\infty$ besagt, daß die Kippstabilität gleich Null ist, daß also der Träger beim Aufbringen der geringsten Last sofort wegkippt. Diesem Falle kommt als Grenzwert und als Übergang des Kipp-Problems zu einem Spannungsproblem gewisse Bedeutung zu. Der wegen $\sqrt{\bar{\lambda}}\,\alpha = 0 \cdot \infty = 1$ unbestimmte, aber endliche Ausdruck

$$\sqrt{\bar{\lambda}}\,\alpha\,\vartheta_{(z=0)} = \frac{P e_P\, l}{D}\,\bar{C}_2$$

bedeutet eine mechanische Größe, die einem Torsionsmoment proportional ist, welches am freien Trägerende wirkt und den Stab verdreht. Dieses Torsionsmoment bedingt nach der *de St. Venant*schen Torsionstheorie einen linearen Drillwinkelverlauf, dem (38c) genau entspricht.

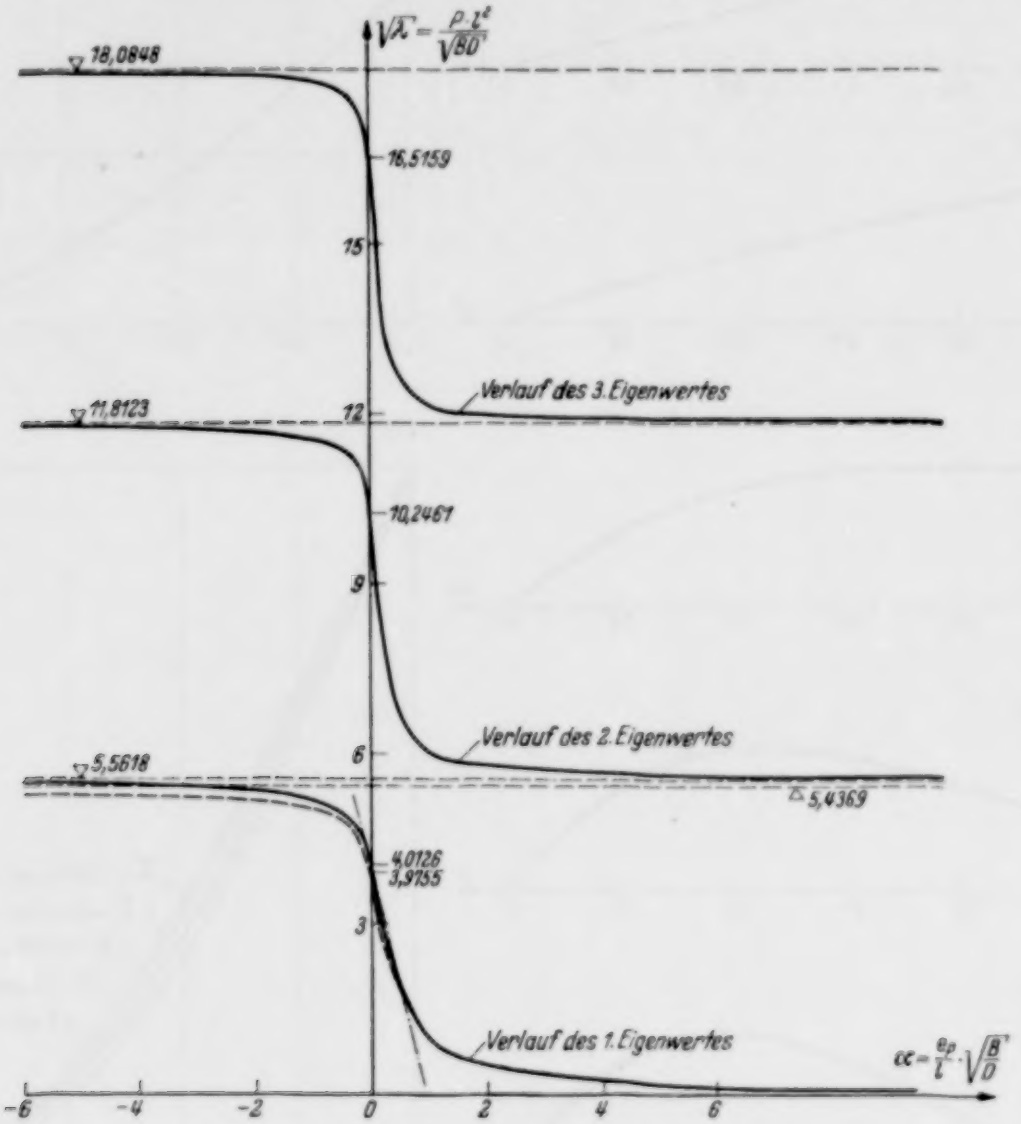


Abb. 5. Beispiel 2, Kippwertverlauf.
——— Kippwertverlauf gemäß (37);
– – – – „ „ (13) und (21);
– · – · – „ „ (39).

Die Berechnung der Eigenwerte für große positive α zeigt, daß dem Werte $\alpha = -\infty$ der erste Eigenwert $\sqrt{\bar{\lambda}} = 5{,}5618$ und $\alpha = +\infty$ der erste Eigenwert $\sqrt{\bar{\lambda}} = 0$ zugeordnet ist (Abb. 5). In diesem Bild ist auch die von *Prandtl* berechnete Näherungsformel für die Kippkraft bei kleinen Exzentrizitäten eingetragen. Sie lautet mit unseren Bezeichnungen

$$\sqrt{\bar{\lambda}} = 4{,}0126 - 4{,}1334\,\alpha \tag{39}$$

und liefert im Bereich $-0{,}2 < \alpha < +0{,}6$ hinreichend gute Näherungswerte.

Abb. 6 beinhaltet für die oben angegebenen Werte α den exakt und näherungsweise berechneten Drillwinkelverlauf. In Abb. 7 ist die w-Linie aufgetragen. Sie gilt für alle $\sqrt{\bar{\lambda}}$, außer

für den ersten Eigenwert $\sqrt{\bar{\lambda}} = 0$ bei $\alpha = +\infty$ und ergibt sich aus (33) mit $M(x) = Px$ und den Randbedingungen $w = w_x = 0$ für $x = 1$ zu

$$w = \frac{P l^3}{6 E J_{max}} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right) + 2 \right]. \tag{40}$$

Abb. 7 enthält weiterhin die mit $\mathfrak{W}$-Gewichten näherungsweise nach (34) ermittelten u-Linien (dieser Berechnung lag nach *O. Mohr* ein Ersatzkragträger mit der Einspannstelle am freien Ende des Kippträgerszugrunde). Für das Wertepaar $\alpha = +\infty$ und $\sqrt{\bar{\lambda}} = 0$ tritt keine u-Verschiebung auf.

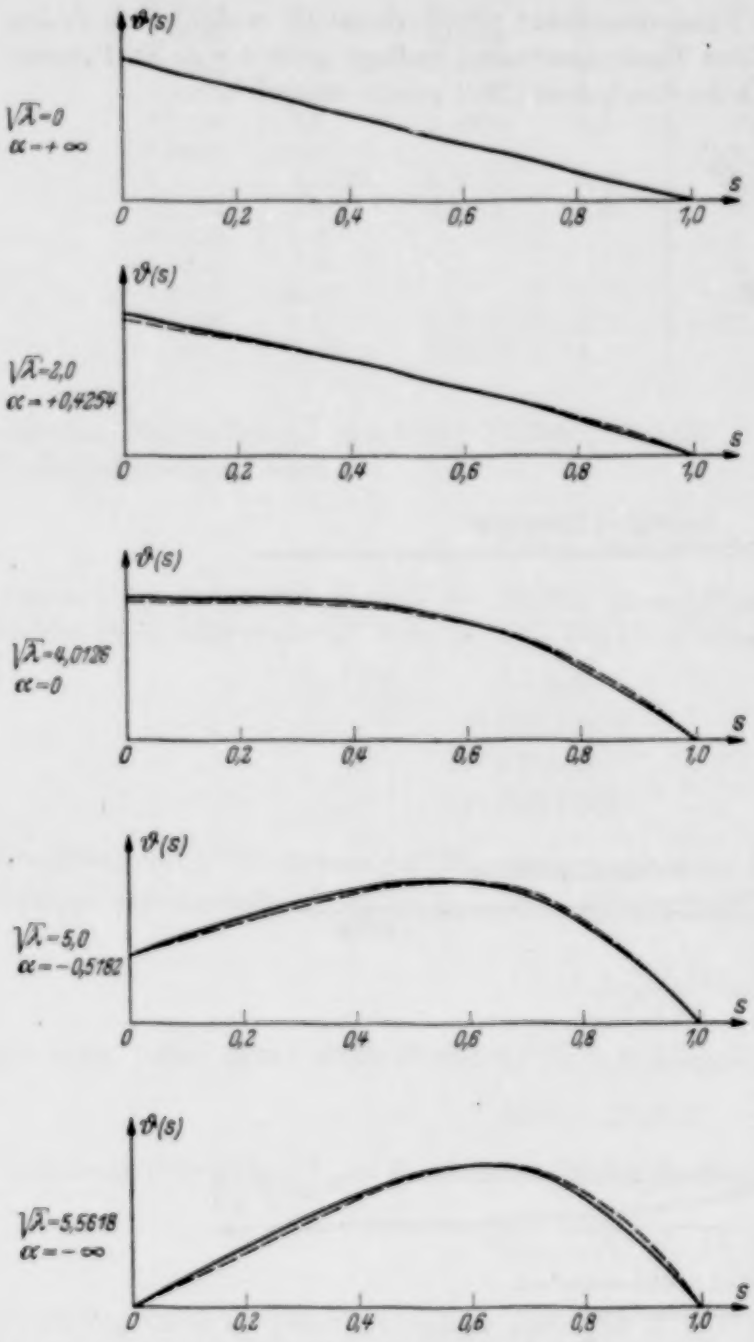


Abb. 6. Beispiel 2, Drillwinkelverlauf, näherungsweise aus 4-reihigen Matrizen und exakt.
··· ϑ aus 4-reihiger Matrix gemäß (13) und (21); —— ϑ exakt gemäß (38).

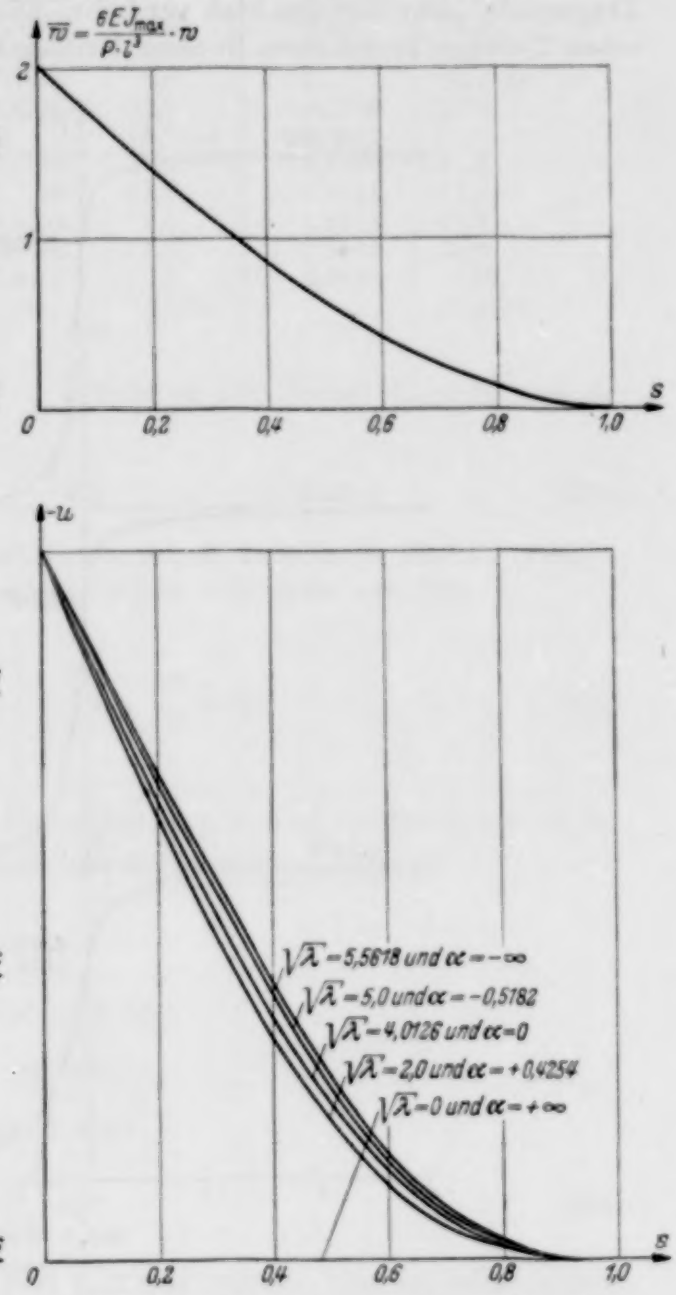


Abb. 7. Beispiel 2, Verlauf von w exakt gemäß (40) und von u näherungsweise mit $\mathfrak{W}$-Gewichten gemäß (34).

9. Zusammenfassung. Es werden die Integralgleichungen des Kipp-Problems des geraden Trägers mit dünnwandigem, doppeltsymmetrischem und offenem Profil aufgestellt. Man verwendet hierfür die Methode der Variation der Konstanten von *Lagrange*. Einfache Fälle, bei denen die exakten Lösungen teils vorliegen, teils berechnet wurden, zeigen die Güte der Näherungen, welche die *Erhard-Schmidt*sche Ungleichung und 4- bzw. 9-reihige Matrizen liefern. Eine schärfere und allgemeinere Untersuchung, sowie die Berechnung der noch nicht vorliegenden, praktisch interessierenden Fälle erfolgt demnächst. Hierbei werden auch die Integralgleichungen des Kipp-

trägers mit einfach-symmetrischem Profil mitgeteilt und insbesondere der Kragträger behandelt. Weiterhin ist die Bestimmung der Biegedrillknick- und Kippstabilität von Durchlaufträgern mit doppeltsymmetrischen Profilen Gegenstand einer weiteren Arbeit [1].

Es ist dem Verfasser eine angenehme Pflicht, seinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr.-Ing. *K. Karas* ferner Herrn Dr. *W. Börsch-Supan* vom Institut für Praktische Mathematik für ihre Unterstützung zu danken.

Mitteilung aus dem Institut für Angewandte Mechanik und Technische Schwingungslehre der Technischen Hochschule Darmstadt (Prof. Dr.-Ing. *K. Karas*)

(Eingegangen am 23. Februar 1957)

Anschrift des Verfassers: *L. Kraus*, Wiesbaden, Idsteinerstr. 11

[1] Die Kippstabilität von Durchlaufträgern wurde für einfache Sonderfälle von *O. Pettersson*, Bull. Nr. 10 from The Div. of Building Statics and Struct. Eng. at the Royal Inst. of Techn., Stockholm, behandelt. Als neueste Arbeit auf dem Gebiet des Kippens ist die Abhandlung von *H. Nylander*, Tekniska Högskolans Handlingar Nr. 102, zu benennen. Auf beide Veröffentlichungen wurde der Verfasser in freundlicher Weise von Herrn Prof. Dr. *E. Chwalla*, Graz, aufmerksam gemacht.

A Study on the Period of the Free Lateral Vibration of the Beam Bridge by the Theory of the Orthotropic Rectangular Plate

By **M. Naruoka** and **H. Yonezawa**

1. Introduction. Important data necessary to discuss the dynamic rigidity of a bridge can be obtained by researches on the free lateral vibration of the bridge. The free lateral vibration of the beam bridge has been researched generally by the theory of the free lateral vibration of the beam and the co-operation between the beam and slab has been neglected in the calculation of the period of the free lateral vibration. Therefore, there are sometimes cases when the calculated period differs considerably from the measured value. As a more rational method of calculating the period of the free lateral vibration of beam bridges, the theory of the continuous isotropic plate supported by flexible beams or of the grillage beam can be applied to the analysis of the free lateral vibration of the beam bridge, but if the number of bridge beams increases or if the torsional rigidity of the beam and slab must be taken into consideration, the calculation by these theories is very difficult. On the other hand, only the theory of the orthotropic rectangular plate makes it possible to apply the theory of thevibration of the plate to the beam bridge without regard to the number of beams.

In this paper, the theory of the orthotropic rectangular plate is theoretically and experimentally applied to the analysis of the free lateral vibration of the right beam bridge, and the result of the analysis is compared with that by the conventional analysis. Thus, it was made obvious that the theory of the orthotropic rectangular plate is very effective for the analysis of the free lateral vibration of the beam bridge.

2. Frequency equation of the orthotropic rectangular plate with two opposite edges simply supported and the other edges free. The differential equation for the free lateral vibration of the orthotropic plate is represented generally by the following well known equation by *M. T. Huber*:

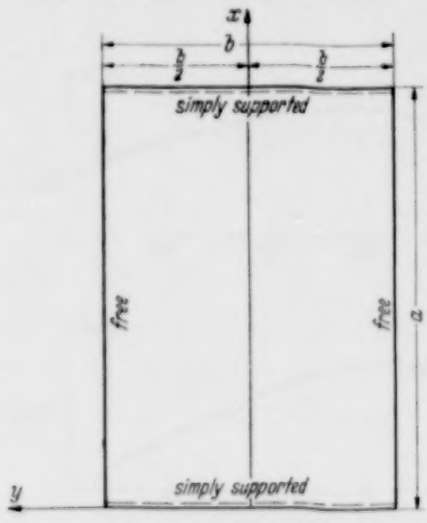


Fig. 1. Orthotropic Plate.

$$\left.\begin{aligned} &D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = -\varrho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\ &\text{with} \\ &2H = \nu_x D_y + \nu_y D_x + 4C, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

where, ϱ is the mass of the material of the plate per unit area, D_x and D_y are the flexural rigidities in x- and y-directions. Equation (1) can be written in the following form:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\varkappa \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_y}{D_x} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = -\frac{\varrho}{D_x} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (2)$$

in which

$$\varkappa = \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}}.$$

When a plate performs a normal mode vibration, the deflection surface can be represented as follows:

$$W = w (A \cos p t + B \sin p t)$$

where w is the normal function and p is the circular frequency. Substituting the above equation in eq. (2), we obtain

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\varkappa \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_y}{D_x} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\varrho p^2}{D_x} w = 0. \quad (3)$$

The general solution of equation (3) varies according to the condition $\varkappa > 1$, $\varkappa = 1$, $\varkappa < 1$ and $\varkappa = 0$.

We shall consider the particular case in which the boundary conditions are that the two edges $x = 0$ and $x = a$ of the plate are simply supported and the other edges are free at $y = \pm b/2$ as

shown in Fig. 1. Then we have the following end conditions:

$$\left.\begin{aligned} &w = 0\,, \\ &M_x = -D_x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \text{for the edges } x = 0 \text{ and } x = a\,,$$

$$\left.\begin{aligned} &M_y = -D_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0\,, \\ &V_y = -D_y\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\left(2\varkappa - \nu_y\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial y\,\partial x^2}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \text{for the edges } y = \pm b/2\,.$$

In these boundary conditions, we shall assume as $\nu_x = \nu_y = \nu$ to make it simple.

For the sake of convenience, the frequency equation for only the two cases $\varkappa = 1$ and $\varkappa = 0$ will be induced. The result of calculation is as follows:

a) Case $\varkappa = 1$ and $\left[\left(\frac{\varrho p^2}{D_x}\right)\left(\frac{a}{m\pi}\right)^4\right]^{1/2} - 1 > 0\,,$

$$r = \alpha\gamma\,, \quad r' = \alpha\gamma' : \qquad \gamma^2,\ \gamma'^2 = \left[\left(\frac{\varrho p^2}{D}\right)\left(\frac{a}{m\pi}\right)^4\right]^{1/2} \pm 1\,,$$

$$1)\ \ \gamma'\left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}} - \nu\right)\left[\gamma'^2 + \left(2 - \nu\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\right]\cosh\frac{r\,b}{2}\sin\frac{r'\,b}{2} +$$
$$+\gamma\left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}} + \nu\right)\left[\gamma^2 - \left(2 - \nu\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\right]\sinh\frac{r\,b}{2}\cos\frac{r'\,b}{2} = 0 \qquad (4)$$

for the vibration symmetrical to x-axis,

$$2)\ \ \gamma'\left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}} - \nu\right)\left[\gamma'^2 + \left(2 - \nu\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\right]\sinh\frac{r\,b}{2}\cos\frac{r'\,b}{2} -$$
$$-\gamma\left(\gamma'^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}} + \nu\right)\left[\gamma^2 - \left(2 - \nu\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\right]\cosh\frac{r\,b}{2}\sin\frac{r'\,b}{2} = 0 \qquad (5)$$

for the vibration reversely symmetrical to x-axis;

b) case $\varkappa = 1$ and $\left[\left(\frac{\varrho p^2}{D_x}\right)\left(\frac{a}{m\pi}\right)^4\right]^{1/2} > 0\,,$

$$r = \alpha\gamma\,, \quad r' = \alpha\gamma' : \quad \gamma^2, \gamma'^2 = 1 \pm \left[\left(\frac{\varrho p^2}{D_x}\right)\left(\frac{a}{m\pi}\right)^4\right]^{1/2}\,,$$

$$1)\ \ \gamma'\left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}} - \nu\right)\left[\gamma'^2 - \left(2 - \nu\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\right]\cosh\frac{r\,b}{2}\sinh\frac{r'\,b}{2} -$$
$$-\gamma\left(\gamma'^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}} - \nu\right)\left[\gamma^2 - \left(2 - \nu\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\right]\sinh\frac{r\,b}{2}\cosh\frac{r'\,b}{2} = 0 \qquad (6)$$

for the vibration symmetrical to x-axis,

$$2)\ \ \gamma'\left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}} - \nu\right)\left[\gamma'^2 - \left(2 - \nu\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\right]\sinh\frac{r\,b}{2}\cosh\frac{r'\,b}{2} -$$
$$-\gamma\left(\gamma'^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}} - \nu\right)\left[\gamma^2 - \left(2 - \nu\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\right]\cosh\frac{r\,b}{2}\sinh\frac{r'\,b}{2} = 0 \qquad (7)$$

for the vibration reversely symmetrical to x-axis;

c) case $\varkappa = 0$ and $\gamma^4 = \left(\frac{\varrho p^2}{D_x}\right)\left(\frac{a}{m\pi^4}\right)^4 - 1 > 0\,, \quad r = \alpha\gamma\,,$

$$1)\ \ \left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}} - \nu\right)\left[\gamma^2 + \left(2 - \nu\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\right]\cosh\frac{r\,b}{2}\sin\frac{r\,b}{2} +$$
$$+\left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}} + \nu\right)\left[\gamma^2 - \left(2 - \nu\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\right]\sinh\frac{r\,b}{2}\cos\frac{r\,b}{2} = 0 \qquad (8)$$

for the vibration symmetrical to x-axis,

$$2)\quad \left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}-\nu\right)\left[\gamma^2+\left(2-\nu\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\right]\sinh\frac{r\,b}{2}\cos\frac{r\,b}{2}-$$
$$-\left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}+\nu\right)\left[\gamma^2-\left(2-\nu\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\right]\cosh\frac{r\,b}{2}\sin\frac{r\,b}{2}=0 \qquad (9)$$

for the vibration reversely symmetrical to x-axis;

d) case $\varkappa=0$ and $\gamma^4=1-\left(\frac{\varrho\,p^2}{D_x}\right)\left(\frac{a}{m\,\pi}\right)^4>0$, $r=\frac{\alpha\,\gamma}{\sqrt{2}}$

$$1)\quad \left[\gamma^2\left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}+\nu\right)-\left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}-\nu\right)\left(2-\nu\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\right]\sin\frac{r\,b}{2}\cos\frac{r\,b}{2}+$$
$$+\left[\gamma^2\left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}-\nu\right)+\left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}+\nu\right)\left(2-\nu\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\right]\sinh\frac{r\,b}{2}\cosh\frac{r\,b}{2}=0 \qquad (10)$$

for the vibration symmetrical to x-axis,

$$2)\quad \left[\gamma^2\left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}+\nu\right)-\left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}-\nu\right)\left(2-\nu\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\right]\sin\frac{r\,b}{2}\cos\frac{r\,b}{2}-$$
$$-\left[\gamma^2\left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}-\nu\right)+\left(\gamma^2\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}+\nu\right)\left(2-\nu\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\right)\right]\sinh\frac{r\,b}{2}\cosh\frac{r\,b}{2}=0 \qquad (11)$$

for the vibration reversely symmetrical to x-axis,

where $$\alpha=\frac{m\,\pi}{a}\sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}}.$$

For the particular case when the plate is supported by flexible beams at both edges $y=\pm b/2$, the frequency equation for the vibration symmetrical to x-axis becomes as follows, under the assumption $\nu=0$:

a) Case $\varkappa=1$: and $\left[\left(\frac{\varrho\,p^2}{D_x}\right)\left(\frac{a}{m\,\pi}\right)^4\right]^{1/2}-1>0$,

$r=\alpha\,\gamma$, $r'=\alpha\,\gamma'$: $\gamma^2,\gamma'^2=\left[\left(\frac{\varrho\,p^2}{D_x}\right)\left(\frac{a}{m\,\pi}\right)^4\right]^{1/2}\pm 1$,

$$\Phi\,(\gamma^2+\gamma'^2)\cosh\frac{r\,b}{2}\cos\frac{r'\,b}{2}-\gamma^2\gamma'^2\left(\gamma\sinh\frac{r\,b}{2}\cos\frac{r'\,b}{2}+\gamma'\cosh\frac{r\,b}{2}\sin\frac{r'\,b}{2}\right)-$$
$$-2\,\gamma\,\gamma'\left(\gamma\cosh\frac{r\,b}{2}\sin\frac{r'\,b}{2}-\gamma'\sinh\frac{r\,b}{2}\cos\frac{r'\,b}{2}\right)=0; \qquad (4')$$

b) case $\varkappa=1$ and $1-\left[\left(\frac{\varrho\,p^2}{D_x}\right)\left(\frac{a}{m\,\pi}\right)^4\right]^{1/2}>0$,

$r=\alpha\,\gamma$, $r=\alpha\,\gamma'$: $\gamma^2,\gamma'^2=1\pm\left[\left(\frac{\varrho\,p^2}{D_x}\right)\left(\frac{a}{m\,\pi}\right)^4\right]^{1/2}$,

$$\Phi\,(\gamma^2-\gamma'^2)\cosh\frac{r\,b}{2}\cosh\frac{r'\,b}{2}+\gamma^2\gamma'^2\left(\gamma\sinh\frac{r\,b}{2}\cosh\frac{r'\,b}{2}-\gamma'\cosh\frac{r\,b}{2}\sinh\frac{r'\,b}{2}\right)+$$
$$+2\,\gamma\,\gamma'\left(\gamma\cosh\frac{r\,b}{2}\sin\frac{r'\,b}{2}-\gamma'\sinh\frac{r\,b}{2}\cos\frac{r'\,b}{2}\right)=0; \qquad (6')$$

c) case $\varkappa=0$ and $\gamma^4=\left(\frac{\varrho\,p^2}{D_x}\right)\left(\frac{a}{m\,\pi}\right)^4-1>0\cdot r=\alpha\,\gamma$,

$$2\,\Phi-\gamma^3\left(\tanh\frac{r\,b}{2}+\tan\frac{r\,b}{2}\right)=0; \qquad (8')$$

d) case $\varkappa=0$ and $\gamma^4=1-\left(\frac{\varrho\,p^2}{D_x}\right)\left(\frac{a}{m\,\pi}\right)^4>0$, $r=\alpha\,\gamma/\sqrt{2}$,

$$\sqrt{2}\,\Phi\left(\cosh^2\frac{r\,b}{2}-\sin^2\frac{r\,b}{2}\right)+\gamma^3\left(\sinh\frac{r\,b}{2}\cosh\frac{r\,b}{2}+\sin\frac{r\,b}{2}\cos\frac{r\,b}{2}\right)=0 \qquad (10')$$

where [1] $$\alpha = \frac{m\pi}{a}\sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}}, \qquad \Phi = \left(\frac{E J_R}{D_x} - f\right)\alpha$$

and $E J_R$ = flexural rigidity of edge beam.

3. A theoretical study on the period of the free lateral vibration of the beam bridge. Let us consider for instance the beam bridge as shown in Fig. 2. As the co-ordinate axis, the direction of the main beam and the direction of the floor beam or of the short span of the slab are assumed as x-axis and y-axis respectively.

a) On the deflection surface. We shall consider the beam bridge of the T-section. When the fundamental frequency of the beam bridge is calculated by the beam theory, the vibration

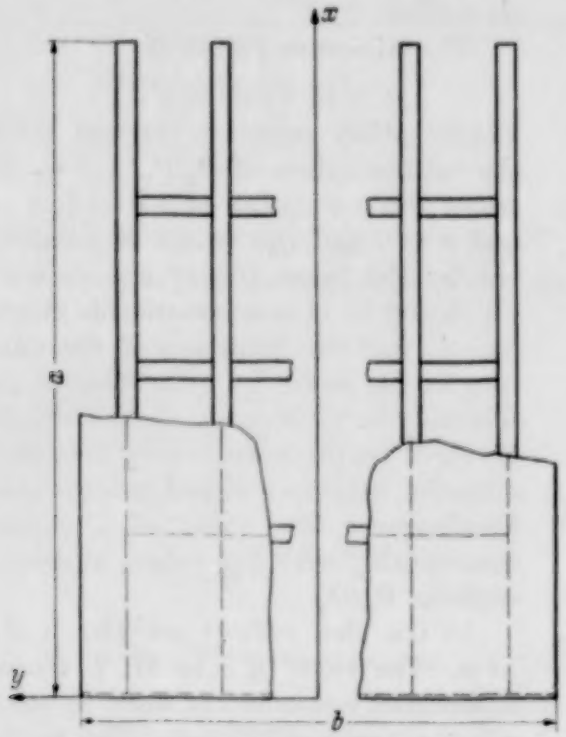


Fig. 2. Beam Bridge Considered as Orthotropic Plate.

Fig. 3. Fundamental Mode of Vibration of Simple Beam.

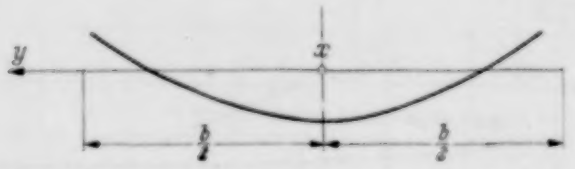


Fig. 4. Vibration Mode Having one Node in y-Direction.

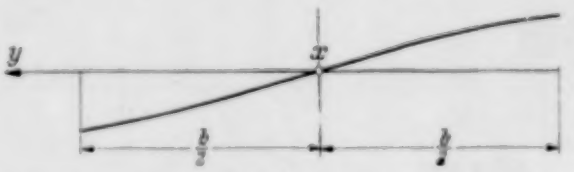


Fig. 5. Vibration Mode Having Two Nodes in y-Direction.

without nodes as shown in Fig. 3 is most important and the frequency and the corresponding period of this mode of vibration are obtained by the well known equation

$$p_b = 2\pi f = \frac{\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{E I_b}{\varrho_b}}, \qquad \tau = \frac{1}{f} = \frac{2 a^2}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho_b}{E I_b}}, \tag{12}$$

where I_b is the moment of inertia of T-section of which the effective width of the compression flange is the distance from center to center of the slab, and ϱ_b the mass of the above T-section per unit length.

Accordingly, when the span and the section of the beam are equal, the frequency becomes equal, even if the number of main beams or the width of the beam bridge or the relative stiffness of the beam to that of the slab are different. This is obviously irrational when we consider that the main beam, floor beam, stringer and slab resist the load as co-operating members and operate together. The theory of the orthotropic plate gives rational results to these problems as can be unterstood from the author's study on the experimental stress analysis on the steel highway beam bridge[2].

In the analysis by the theory of the orthotropic plate, the deflection surface in x-direction is the same as with the case of the beam, but the deflection surface in y-direction should be discussed.

[1] *W. Cornelius*, Stahlbau, 21 (1952), S. 21, 43 und 60.

[2] *M. Naruoka*, Publication of IABSE, 14 (1954), p. 183; *M. Naruoka* and *H. Yonezawa*, Proceedings of the 5th Congress of IABSE (Lisbon), Preliminary Publication 1956, p. 393.

With the beam bridge, of which the span is large compared with the width of the bridge and which vibrates analogously to the beam in the whole, the vibration which has no nodes in y-direction is important and equation (12) can be applied to this case. However, with the beam bridge having a width nearly equal to or larger than the span, it is supposed that the vibration having one or two nodes in y-direction as shown in Fig. 4 and 5 occurs. Which form of vibration occurs, the symmetrical or the reversely symmetrical to x-axis, must be solved by experimental researches, but we shall compare both forms by theoretical consideration.

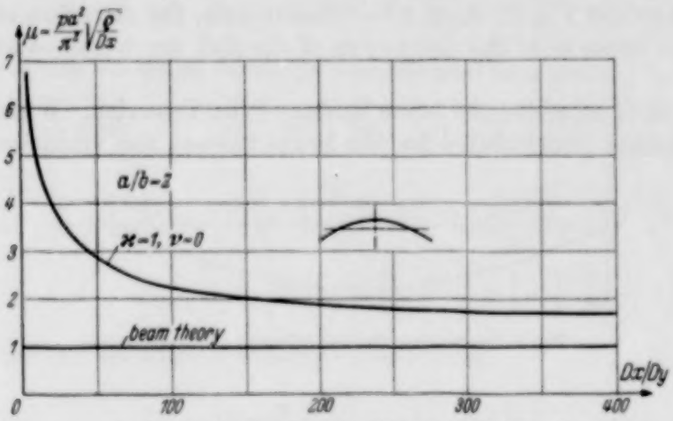


Fig. 6. Circular Frequency for Vibration Mode (Fig. 5).

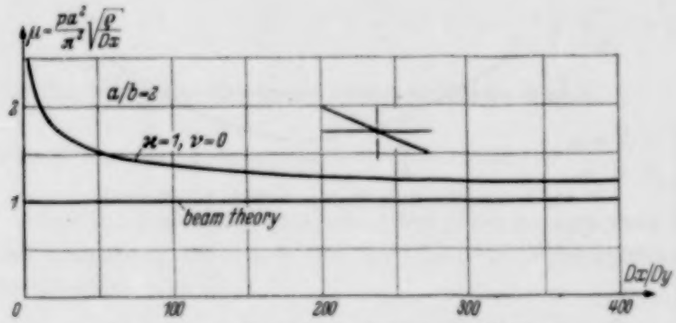


Fig. 7. Circular Frequency for Vibration Mode (Fig. 4).

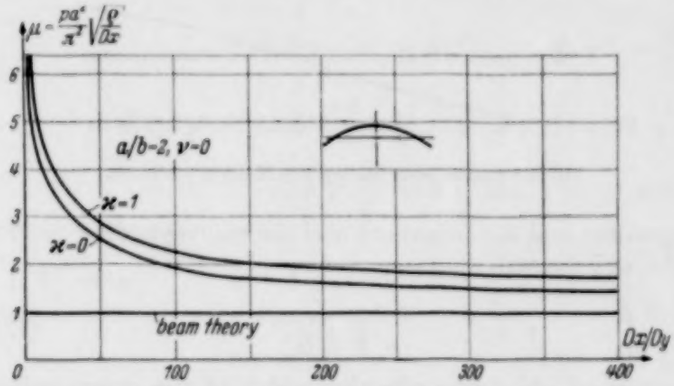


Fig. 8. Circular Frequency for Vibration Mode (Fig. 5).

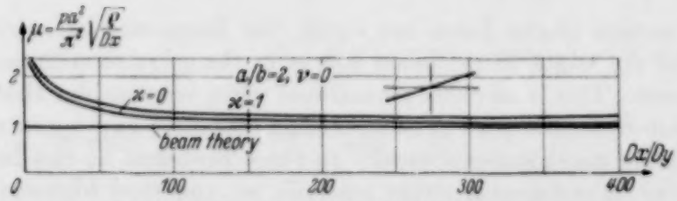


Fig. 9. Circular Frequency for Vibration Mode (Fig. 4).

The minimum values of

$$\mu = (p\,a^2/\pi^2)\,(\varrho/D_x)^{1/2}$$

which satisfy equation (4) and (5) for the various values of $D_x/D_y = 4 \sim 400$, under the asumption of $a/b = 2$, $\varkappa = 1$ and $\nu = 0$ and the values of μ calculated by the beam theory are shown in Fig. 6 and 7. It is a remarkable characteristic that the frequency of the vibration having nodes in y-direction is considerably large in comparison with that obtained by the beam theory even if the vibrating form in x-direction is the same. Furthermore, the value of μ changes considerably with the values of relative stiffness D_x/D_y.

b) On the effect of the value of $\varkappa$. The value of $\varkappa$ in *M. T. Huber's* differential equation can only be determined experimentally and differs according to the structure of the beam bridge. Here, we shall discuss the effect of the value of $\varkappa$ on the frequency.

The values of μ which satisfy equation (4) and (8) or (5) and (9) under the assumption $\varkappa = 1$ or $\varkappa = 0$ are shown in Fig. 8 and 9 for the values of $a/b = 2$, $\nu = 0$ and $D_x/D_y = 4 \sim 400$. The frequency under the assumption of $\varkappa = 1$ is large in comparison with the case of $\varkappa = 0$, which is quite natural, considering that the torsional rigidity is neglected in the case of $\varkappa = 0$. It is supposed fromthe results of our field test that the calculation under the assumption of $\varkappa = 1$ is applicable to the reinforced or prestressed concrete T-beam bridge and that of $\varkappa = 0$ is applicable to the composite grillage beam bridge. But, the frequency shows no remarkable difference whether the assumption is $\varkappa = 1$ or $\varkappa = 0$.

c) On the effect of the values of the ratio of span to width a/b and the *Poisson's* ratio ν. To investigate the effect of the values of a/b and ν on the frequency, the frequency will be calculated for the cases of $a/b = 1, 2, 4, 8$ and $\nu = 0$, $\nu = 0{,}15$ under the assumption of $\varkappa = 1$ and $D_x/D_y = 4 \sim 400$. The results are shown in Fig. 10, $a \sim d$. It is natural that the frequency ($\nu = 0$) is larger than the frequency ($\nu = 0.15$).

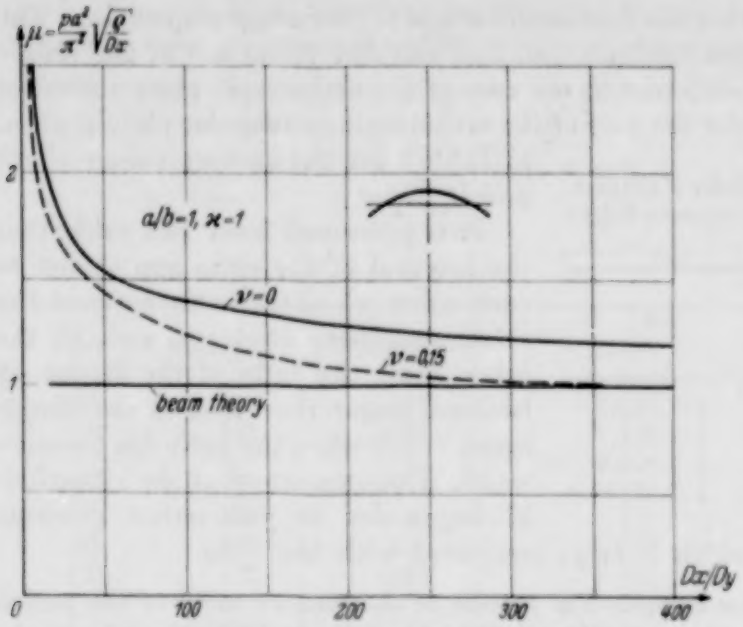


Fig. 10 a). Circular Frequency for Vibration Mode (Fig. 5).

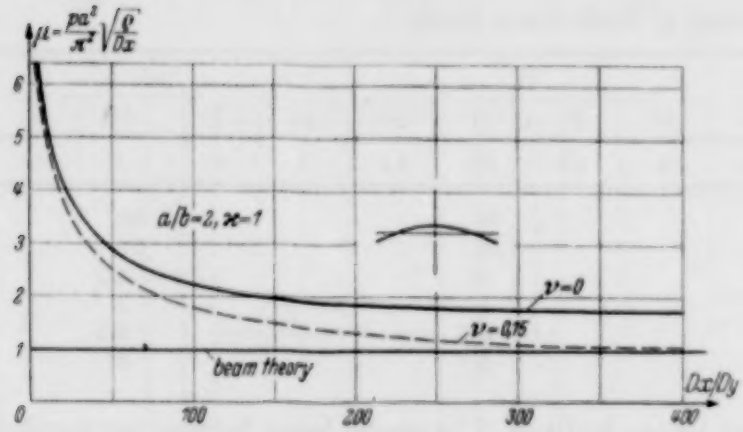


Fig. 10 b). Circular Frequency for Vibration Mode (Fig. 5).

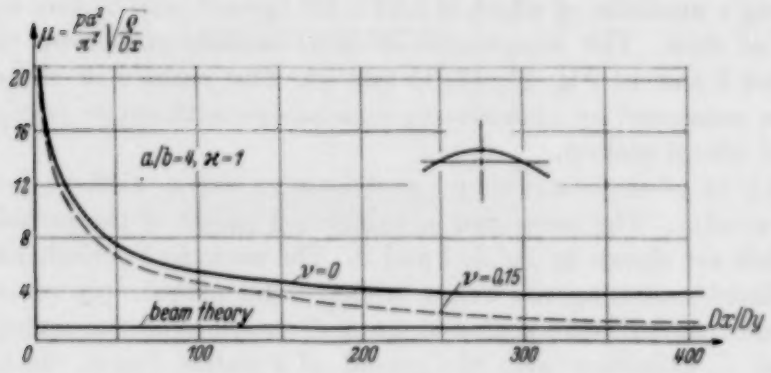


Fig. 10 c). Circular Frequency for Vibration Mode (Fig. 5).

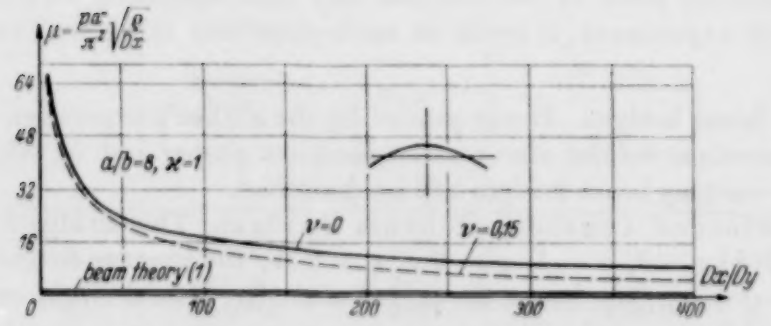


Fig. 10 d). Circular Frequency for Vibration Mode (Fig. 5).

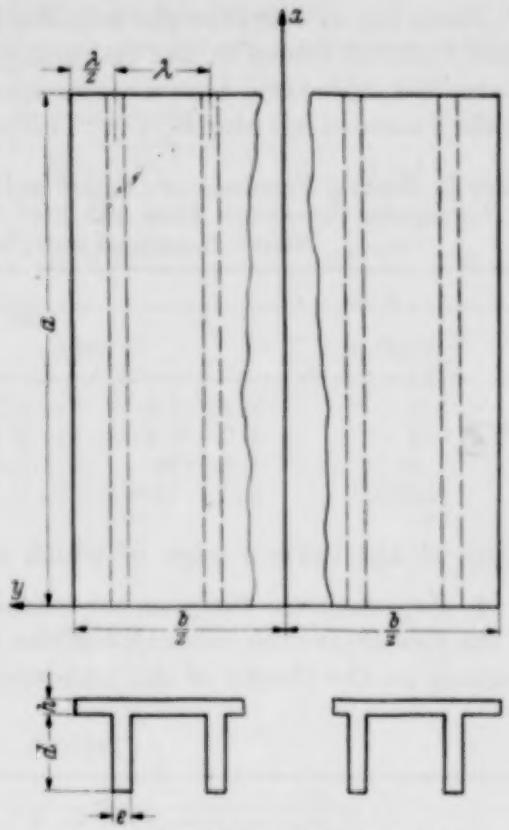


Fig. 11. Model Beam Bridge ($G_1 \sim G_3$).

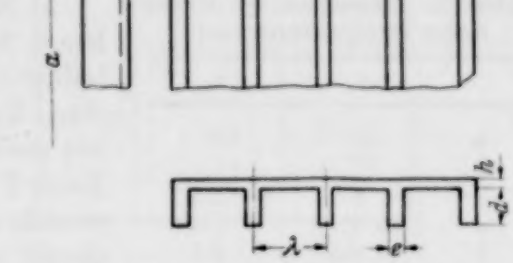


Fig. 12. Model Beam Bridge ($G_4 \sim G_5$).

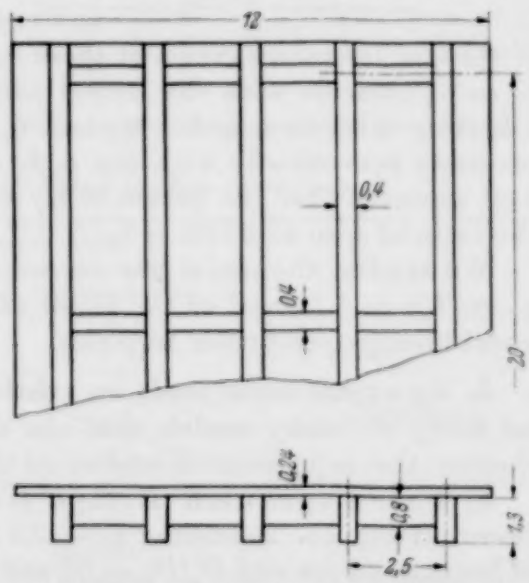


Fig. 13. Dimension of Model Grillage Beam Bridge G_4 (unit: cm).

Next, let us consider the relation between the fundamental and higher order frequencies. The ratio 1:4:9 is found in the frequency of the fundamental, 2nd and 3rd vibrations of the simple beam, but, this ratio becomes ramarkably different in the case of the orthotropic plate according to the values of a/b and D_x/D_y. This ratio for the case of the orthotropic rectangular plate is given in Table 1 for the various values of a/b and D_x/D_y.

Table 1. *Ratio of Frequency of 1st, 2nd and 3rd Order Vibration of Rectangular Orthotropic Plate with Each Two Opposite Edges Simply Supported and Free*

a/b \ D_x/D_y	4	100	200
1	1:1.5:2.6	1:1.1:1.4	1:1.1:1.3
2	1:2.4:6.4	1:1.3:2.2	1:1.2:1.9
4	1:4.8:20	1:2.1:5.1	1:1.9:3.9
8	1:7.1:73	1:4.0:17	1:3.4:13

It is presumed from this table that the interval of the ratio approaches to each other when the ratio b/a and the relative stiffness are large, and, on the other hand the ratio of the frequency becomes larger than that of the simple beam 1:4:9 when the ratio b/a becomes small. This suggests that the vibrations having nodes in y-direction generate easily in the beam bridge of which the width is large compared with the span.

4. Experimental study on the model beam bridge. The results of the measurement of the period of the free transverse vibration of the model beam bridge shall be compared with the results of the analysis by the theory of the orthotropic plate or by the beam theory in the following.

Table 2. *Dimension of Model Beam Bridge*

	G_1				G_2				G_3			
	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)
d (cm)	5	3.5	2	0.5	5	3.5	(2)	0.5	5	3.5	2	0.5
a (cm)	40				40				40			
b (cm)	20				20				20			
λ (cm)	4				4				2.5			
e (cm)	1				1				1			
h (cm)	0.5				0.5				0.5			
number of beams	5				5				8			

Table 3. *Dimension of Model Beam Bridge (unit: cm)*

	G_4	G_5
a	51	44
b	17	11
λ	4	2.5
d	2.5	0.45
h	0.4	0.5
e	1	1

a) Model beam bridge. The model beam bridges are parallel beam bridges G_1, G_2, G_3, G_4 and G_5, grillage beam bridge G_6 and ladder type beam bridge G_7. The models $G_1 \sim G_5$ are made of cast iron, Young's mudulas of which is 1.03×10^6 kg/cm^2, and G_6 und G_7 are made of steel. The dimensions of these models are shown in Table 2 and 3 and in Fig. 11, 12, 13 and 14. The periods of these models are measured by cathode-ray oscilloscope with single sweep circuit and cristal pickup.

b) Results of measurement and comparison with theoretical results. The measured or calculated values of the period of the free lateral vibration of these models are shown in Table 4 and 5. The measured periods on $G_1 \sim G_3$ coincide with the period calculated assuming the beam bridge as an orthotropic plate vibrating with two nodes, G_5 and G_6 coincide with the period as an orthotropic plate vibrating reversely symetrically with one node and G_7 coincides with the period of a simple beam. It is well expected that the period of G_7 will coincide with that of the simple beam, considering that the ratio of span to width is 5.

We studied the nodal line on the vibrating plate by the fine and dry sand scattering on the plate ($b/a = 1/2$), and as the result of this experiment, it could be made clear that there are two nodal lines perpendicular to y-axis.

5. An experimental study on existing beam bridges. It was proved by the author's experimental study on many models that the theoretical results above mentioned are proper but in this chapter the experimental studies on the existing beam bridges will be described.

a) The Kugenuma Bridge (reinforced concrete T-beam bridge). This bridge is shown in Fig. 15. Assuming $E_c = 2.1 \times 10^5$ kg/cm^2, $\varkappa = 1$, $\nu = 0$ or $\nu = 0.15$, the average height of beam = 62 cm and $D_x/D_y = 56$ and neglecting floor beam, the period of the free lateral vibration symmetrical to x-axis is calculated by eq. (4).

Table 4. *Calculated and Measured Periods of Tested Mode Bridges (unit: sec)*

		Measured Value	Theoretical Value			
			Beam	Orthotropic Plate		
				$H^2 = D_x D_y$	$H^2 = D_x D_y$	$H = 0$
G_1	(a)	0.00123	0.00160	0.00101	0.00142	0.00121
	(b)	132	222	115	175	137
	(c)	145	369	135	261	157
	(d)	147	1124	155	412	169
G_2	(a)	0.00115	0.00160	0.00100	0.00140	0.00120
	(b)	125	224	123	186	146
	(c)	130	424	139	263	162
	(d)	132	1087	162	432	176
G_3	(a)	0.00093	0.00164	0.00106	0.00149	0.00127
	(b)	96	225	123	181	149
	(c)	127	364	145	260	170
	(d)	135	1034	162	432	177

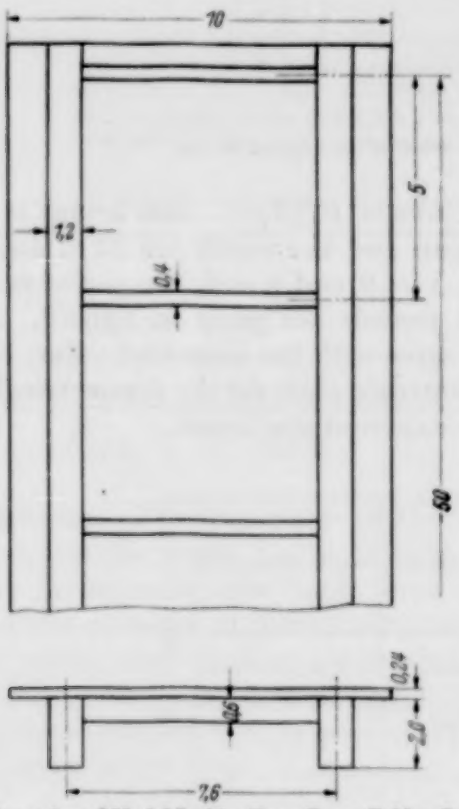


Fig. 14. Dimension of Model Ladder Type Beam Bridge G_1 (unit: cm).

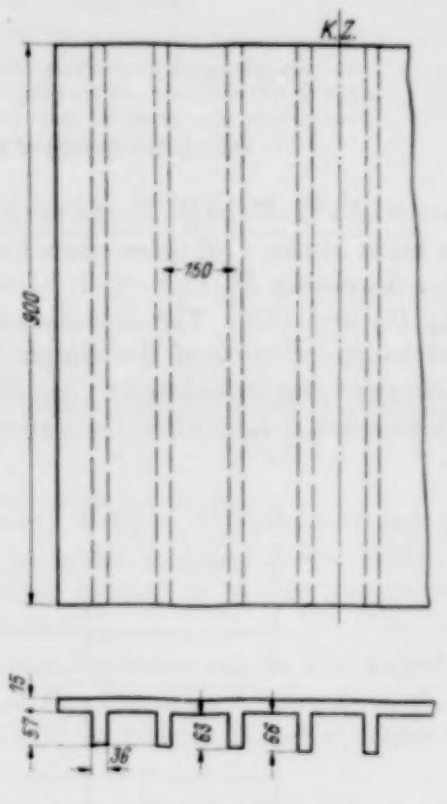


Fig. 15. Dimension of the Kugenuma Bridge (unit: cm).

Table 5. *Calculated and Measured Periods of Tested Model Bridges* (*unit: sec*)

	Measured Value	Theoretical Value			
		Beam	Orthotropic Plate		
			$H^2 = D_x D_y$	$H^2 = D_x D_y$	$H = 0$
G_4	0.0046	0.0050	0.0016	0.0031	
G_5	0.0036	0.0113		0.0024	
G_6	0.00063	0.0011	0.00017	0.00045	0.00018
G_7	0.0040	0.0040		0.0013	

The periods measured or calculated are given in Table 6 with the values by the theory of the simple beam. The value calculated by the theory of the orthotropic plate can explain well the measured value.

Table 6. *Calculated and Measured Period of the Kugenuma Bridge* (*unit*: *sec*)

Measured Value	Beam	Orthotropic Plate, $H^2 = D_x D_y$	
		$\nu = 0$	$\nu = 0.15$
$0.040 \sim 0.065$	$0.103 \sim 0.106$	0.055	0.059

b) The Sagoshi Bridge (composite grillage beam bridge). This bridge consists of four main beams and one cross beam and the skelton is shown in Fig. 16. Assuming $E_c = 2.1 \times 10^6$ kg/cm², $E_s/E_c = 10$ and $\nu = 0$, the period is calculated by eq. (4), (4′), (8), (8′) and (12). The measured calculated values are shown in Table 7.

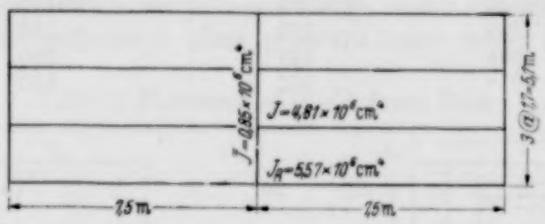


Fig. 16. Arrangement of Main Beams and Cross Beam of the Sagoshi Bridge.

c) The Shōhei Bridge (prestressed concrete beam bridge). This bridge is composed of fifteen main beams and three cross beams, and the span and the width are 12 m and 11 m respectively. Assuming $D_x/D_y = 9$, $E_c = 4.0 \times 10^5$ kg/cm², $\nu = 0$ and $\varkappa = 1$, the period is calculated by eq, (4), (5) and (12). The calculated and measured periods are given in Table 8. The value calculated by the theory of the simple beam does not agree with the measured value, but, on the other hand, the value calculated by the theory of the orthotropic plate for the symmetrical vibrating orm with two nodes in x-direction can explain well the experimental result.

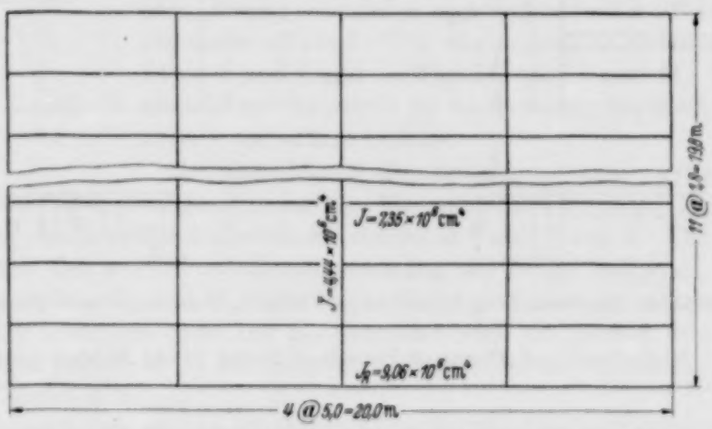


Fig. 17. Arrangement of Main Beams and Cross Beams of the Shigita Bridge.

d) Shigita Bridge (composite grillage beam bridge). This bridge is a composite grillage beam bridge, the span and width of which are 20 m and 22 m respectively, and the numbers of main beams and floor beams are 12 and 3 as shown in Fig. 17. The period is calculated by equations (4), (4′), (8), (8′) and (12) and the calculated and measured periods are given in Table 7.

It is obvious from these tables that the periods calculated by the theory of the orthotropic plate coincide with the measured values, but the values calculated by the beam theory do not. With the beam bridge of which the width is almost equal to the span such as Kugenuma, Shohei and Sigita Bridges, the calculated period for the symmetrical vibration having two nodes in x-di-

rection coincide well with the measured period. With the beam bridge of which the span is relatively large compared to the width such as the Sagoshi bridge, the calculated frequency calculated by beam theory coincides with the measured frequency.

Table 7. *Calculated and Measured Period of the Sagoshi Bridge and Shigita Bridge (unit: sec)*

	Measured Value	Calculated Value		Remarks
		by orthotropic plate	by beam	
The Sagoshi Bridge	0.136	0.127 ($A, C, \varkappa = 0$)	0.147	$D_x/D_y = 41.1$
		0.112 ($A, C, \varkappa = 1$)		
		0.134 ($B, C, \varkappa = 0$)		$D_x/_yD = 97.0$
		0.116 ($B, C, \varkappa = 1$)		
The Shigita Bridge	0.127	0.123 ($A, C, \varkappa = 0$)	0.189	$D_x/_yD = 6.4$
		0.105 ($A, C, \varkappa = 1$)		
		0.153 ($B, C, \varkappa = 0$)		$D_x/D_y = 87.5$
		0.132 ($B, C, \varkappa = 1$)		
		0.150 ($A, D, \varkappa = 0$)		$D_x/D_y = 6.4$
		0.112 ($A, D, \varkappa = 1$)		

Remarks: *A* means that the formula ($D_x = EJ/a$, $D_y = n E\bar{J}/l$ (n: number of cross beam)) is used in the calculation of the flexural rigidity of the orthotropic plate. — *B* means that the formula ($D_x = E J/a$, $D_y = E h^3/12$ (h: thickness of slab, $\nu = 0$)) is used in the calculation of the flexural rigidity of the orthotropic plate. — *C* means that the orthotropic plate is supported by the edge beams at two edges. — *D* means that the orthotropic plate is free at two edges.

Table 8. *Calculated and Measured Period of the Shohei Bridge (unit: sec)*

Measured Value	Beam	Orthotropic Plate, $H^2 = D_x D_y$	
0.063	0.185	0.071	0.123

6. Conclusion. The frequency of the right, simple beam bridges is discussed by the laboratory study on the model beam bridges and the field tests on existing beam bridges in this paper, but furthermore, the application to the skew beam bridge or to the continuous beam bridge and the problem of forced vibration should be studied.

Even if more exact studies are necessary, it is made sure by the study in this paper that the theory of the orthotropic plate is proper to the analysis of the free lateral vibration of the beam bridge and sufficient enough for practical purpose, especially for the beam bridge of which the width is almost equal to the span.

(Eingegangen am 4. März 1957.)

Anschrift der Verfasser:

Professor *Masao Naruoka*, Kyoto (Japan), Kyoto University, Department of Civil Engineering.
Professor *HiroshiYonezawa*, Ube (Japan), Yamaguchi University, Department of Civil Engineering.

Praktische Methoden zur Lösung von Problemen der stationären und instationären Grundwasserströmungen

Von G. Heinrich und K. Desoyer

1. Einleitung. In zwei vorangegangenen Arbeiten[1] wurde die Theorie der Grundwasserströmungen einerseits auf die Behandlung von instationären Flüssigkeitsbewegungen, andererseits auf den Fall anisotroper inhomogener Festkörper erweitert. Im folgenden soll die Anwendung der entwickelten Gleichungen auf praktische Aufgaben der Grundwasserströmungen gezeigt werden.

Um zu einer definierten Lösung eines vorliegenden Problems der Grundwasserbewegung zu gelangen, ist eine genaue Kenntnis der Rand- und Anfangsbedingungen sowie eine quantitative Erfassung der Durchlässigkeitseigenschaften des Festkörpers erforderlich. Auf die praktische Ermittlung dieser Daten soll hier nicht eingegangen werden[2]. Die in Frage kommenden Rand- und Anfangsbedingungen wurden bereits in der ersten der vorangegangenen Arbeiten besprochen. Für die eindeutige Lösung einer praktischen Aufgabe benötigt man ferner die Form und Lage der undurchlässigen Schichten sowie der Grenzflächen des Grundwasserträgers gegen Luft und gegen ruhende Flüssigkeit.

Wenn ein Problem ohne freien Grundwasserspiegel vorliegt, dann handelt es sich bei homogenen, isotropen Grundwasserträgern im stationären Fall um ein Potentialproblem mit festen vorgegebenen Rändern und vorgegebenen Randbedingungen; im instationären Fall können die Randbedingungen vorgegebene oder aus der Problemstellung ermittelbare Funktionen der Zeit sein. Probleme dieser Art bieten meist keine besonderen Schwierigkeiten und sollen daher hier nicht weiter in Betracht gezogen werden. Sie können aber auch nach der im folgenden genauer besprochenen Relaxationsmethode behandelt werden.

Mathematische Schwierigkeiten besonderer Art treten bei Vorhandensein von freien Grundwasserspiegeln auf. Der freie Grundwasserspiegel ist als Randfläche des Strömungsbereiches mit vorgegebenem Druck anzusehen, jedoch ist der Grundwasserspiegel bei stationären Strömungen, bei denen er überdies eine Stromlinienfläche sein muß, nicht vorgegeben, sondern muß bei der Lösung des Problems mit bestimmt werden. Zur strengen Lösung von Aufgaben dieser Art wird vornehmlich die konforme Abbildung in Verbindung mit der Hodographenmethode verwendet[3]. Als Näherungslösung ist im hydraulischen Schrifttum der *Dupuit*sche Ansatz gebräuchlich, der jedoch, wie im folgenden genauer erörtert wird, sowohl in grundsätzlicher wie in praktischer Hinsicht sehr bedenklich erscheint.

Bei der theoretischen Behandlung von instationären Grundwasserströmungen mit freien Spiegelflächen wurde bisher fast ausschließlich die *Dupuit*sche Näherung verwendet[4], die in diesem Fall ebenso bedenklich erscheinen muß.

2. Die *Dupuit*sche Näherung als strenge Lösung für ein anisotropes Festkörpermodell. Im folgenden soll zunächst gezeigt werden, daß nur für ein homogenes, anisotropes Festkörpermodell, bei dem die Durchlässigkeit in vertikaler Richtung unendlich groß ist („einachsig widerstandsfreier Festkörper"), die Grundwasserströmung dem *Dupuit*schen Ansatz streng gehorcht.

Nach *Dupuit* wird bekanntlich näherungsweise angenommen, daß die Standrohrspiegelhöhe h für alle Punkte des Grundwasserträgers, die auf einer Vertikalen liegen, gleich groß ist[5]. Die aus dieser Näherung hervorgehende Gleichung für die Spiegelbewegung soll nun für allgemeinere Voraussetzungen als bisher (beliebige Form der undurchlässigen Schicht, anisotroper Festkörper)

---

[1] *G. Heinrich* und *K. Desoyer*, Ing.-Arch. **23** (1955) S. 73; Ing.-Arch. **24** (1956) S. 81. Bei Verweis auf Gleichungen dieser Arbeiten wird den betreffenden Gleichungsnummern der Hinweis I bzw. II vorangestellt.

[2] Siehe z. B. *J. Kozeny*, Hydraulik, S. 389. Wien 1953.

[3] Siehe z. B. *G. Hamel*, Z. angew. Math. Mech. 14 (1934) S. 129; *G. Hamel* und *E. Günther*, Z. angew. Math. Mech. 15 (1935) S. 255; *V. V. Wedernikow*, Z. angew. Math. Mech. 17 (1937) S. 155; *G. Hamel*, Z. angew. Math. Mech. 18 (1938) S. 39; *H. F. Roßbach*, Ing.-Arch. 12 (1941) S. 221; *J. Kozeny*, a. a. O. S. 329ff.

[4] Vgl. auch *E. P. Nemecek*, Der Strömungsdruck in Böschungen. Diss. T. H. Wien 1953, in der eine andere Behandlungsweise der instationären Grundwasserströmung am Beispiel der Durchströmung eines Dammes vorgeschlagen wird.

[5] *J. Dupuit*, Études théoriques et pratiques, 2. éd. (1863) S. 254; *Ph. Forchheimer*, Hydraulik, 3. Aufl. S. 70, Leipzig-Berlin 1930.

kurz hergeleitet werden. In Abb. 1 sei $z_1(x,y)$ eine gegebene undurchlässige Fläche und $z_2(x,y,t)$ der freie Grundwasserspiegel. Bezeichnen q_x bzw. q_y die in der Zeiteinheit längs der x- bzw. y-Richtung durch die Seitenflächen des dargestellten Elementarquaders eintretenden Flüssigkeitsmengen, so liefert eine Volumsbilanz

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}\,dx + \frac{\partial q_y}{\partial y}\,dy = -\,n\,\frac{\partial z_2}{\partial t}\,dx\,dy\,. \tag{1}$$

Dabei sei n das hier als ortsunabhängig vorauszusetzende relative Porenvolumen.

Für den Fall eines homogenen, anisotropen Grundwasserträgers werde nun vorausgesetzt, daß der Durchlässigkeitsaffinor (I, 8) symmetrisch ist und die vertikale z-Achse mit einer seiner drei Hauptachsenrichtungen zusammenfalle. Als x- und y-Richtung seien seine beiden anderen Hauptachsenrichtungen gewählt. Dann ist gemäß (I, 18)

$$v_x = k_{xx}\,J_x\,, \qquad v_y = k_{yy}\,J_y\,,$$

wobei die Standrohrspiegelgefälle J_x bzw. J_y nach der *Dupuit*schen Näherung von z unabhängig sind und durch $-\,\partial z_2/\partial x$ bzw. $-\,\partial z_2/\partial y$ ersetzt werden. Daraus ergeben sich für q_x und q_y die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} q_x &= -\,(z_2 - z_1)\,k_{xx}\,\frac{\partial z_2}{\partial x}\,dy\,,\\ q_y &= -\,(z_2 - z_1)\,k_{yy}\,\frac{\partial z_2}{\partial y}\,dx\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

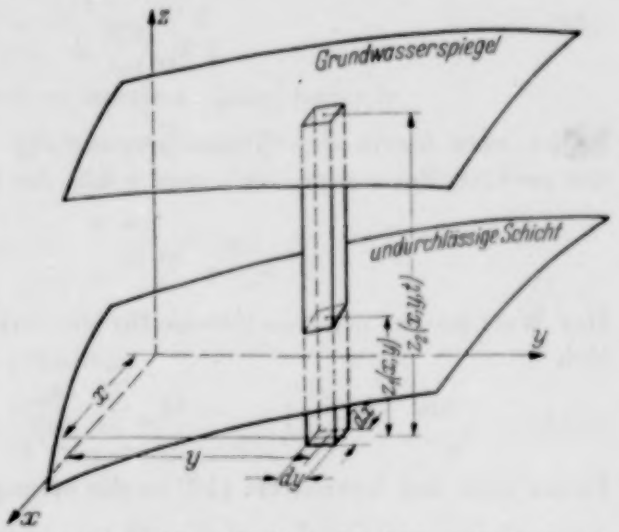


Abb. 1. Zur Ableitung der Bewegungsgleichung für den Grundwasserspiegel in einem einachsig widerstandsfreien Grundwasserträger.

Durch Einsetzen von (2) in (1) erhält man die folgende Gleichung für die Spiegelbewegung:

$$n\,\frac{\partial z_2}{\partial t} = k_{xx}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[(z_2 - z_1)\,\frac{\partial z_2}{\partial x}\right] + k_{yy}\,\frac{\partial}{\partial y}\left[(z_2 - z_1)\,\frac{\partial z_2}{\partial y}\right]. \tag{3}$$

Für den Sonderfall des isotropen Festkörpers ($k_{xx} = k_{yy} = k$) und horizontale undurchlässige Schicht ($z_1 \equiv 0$) erhält man daraus die Gleichung

$$n\,\frac{\partial z_2}{\partial t} = k\left[\frac{\partial^2\left(\frac{z_2}{2}\right)^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{z_2}{2}\right)^2}{\partial y^2}\right], \tag{3a}$$

die bereits in der hydraulischen Literatur bekannt ist[1].

Wir zeigen nun, daß aus den exakten Gleichungen (I, 16b) und (I, 30b), wenn hierin die ζ-Achse mit der vertikalen z-Achse, die ξ- bzw. η-Achse mit der x- bzw. y-Achse des Koordinatensystems der Abb. 1 zusammengelegt werden, beim Grenzübergang $k_{zz} \to \infty$ die soeben hergeleitete Gleichung (3) folgt.

Aus (I, 16b)

$$k_{xx}\,\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_{yy}\,\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_{zz}\,\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0\,, \tag{4}$$

wo h die Standrohrspiegelhöhe ist, folgt für $k_{zz} \to \infty$ die Beziehung

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0\,, \quad \text{also} \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \text{konst.} \tag{5}$$

Die Komponenten eines Normalenvektors $\mathfrak{n}$ auf die undurchlässige Fläche $z_1 = z_1(x,y)$ sind $-\,\partial z_1/\partial x$, $-\,\partial z_1/\partial y$, 1. Da die Fläche $z_1(x,y)$ Stromlinienfläche sein muß, gilt die Beziehung

$$\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n} = -\,v_x\,\frac{\partial z_1}{\partial x} - v_y\,\frac{\partial z_1}{\partial y} + v_z = 0\,. \tag{6}$$

Aus dem verallgemeinerten *Darcy*-Gesetz (I, 12) ergibt sich für die Hauptachsenrichtungen

$$v_x = -\,k_{xx}\,\frac{\partial h}{\partial x}\,, \qquad v_y = -\,k_{yy}\,\frac{\partial h}{\partial y}\,, \qquad v_z = -\,k_{zz}\,\frac{\partial h}{\partial z}\,. \tag{7}$$

---

[1] *Ph. Forchheimer*, a. a. O. S. 104.

Aus (6) und (7) erhält man

$$k_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial x}+k_{yy}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial z_1}{\partial y}-k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z}=0\,, \tag{8}$$

gültig längs der undurchlässigen Schicht $z_1(x, y)$. Aus (8) und (5) sieht man, daß die Größe $\partial h/\partial z$ für den Grenzfall $k_{zz}\to\infty$ gegen Null geht. Es ist dann

$$h=h(x, y) \tag{9}$$

von z unabhängig, wie es der *Dupuit*schen Annahme entspricht. Aus (4) folgt

$$\int_{z_1}^{z_2}k_{zz}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\,dz=-\int_{z_1}^{z_2}\left(k_{xx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+k_{yy}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)dz\,.$$

Führt man hierin den Grenzübergang $k_{zz}\to\infty$ durch, dann hängt wegen (9) der Integrand auf der rechten Seite nur von x und y ab, die Integration ist leicht durchführbar. Man erhält

$$\lim_{k_{zz}\to\infty}k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z}\Big|_{z_1}^{z_2}=-(z_2-z_1)\left(k_{xx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+k_{yy}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right). \tag{4a}$$

Der Wert an der unteren Grenze für die linke Seite kann aus (8) entnommen werden. Damit ergibt sich

$$\lim_{k_{zz}\to\infty}\left(k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z}\right)_{z=z_2}=\left(k_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial x}+k_{yy}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)-(z_2-z_1)\left(k_{xx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+k_{yy}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right). \tag{10}$$

Führt man den Grenzwert (10) in die strenge Gleichung für die Spiegelbewegung (I, 30b)

$$-\frac{\partial z^2}{\partial t}=\frac{1}{n}\left[k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z}-k_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial z_2}{\partial x}-k_{yy}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial z_2}{\partial y}\right]_{\text{längs der Spiegelfläche } z=z_2} \tag{11}$$

ein, so ergibt sich nach einfacher Umformung für den Spiegel ($h=z_2$) die Gleichung (3). Damit ist gezeigt, daß die *Dupuit*sche Näherung als strenge Lösung für ein Festkörpermodell, das in vertikaler Richtung unendlich große Durchlässigkeit besitzt, anzusehen ist. Eine Schwierigkeit bei der Behandlung dieses einachsig widerstandsfreien Festkörpermodells besteht darin, daß bei der Ableitung der Gleichungen für die Grundwasserbewegung vorausgesetzt wurde, der Widerstand, den der Festkörper der strömenden Flüssigkeit entgegensetzt, sei so groß, daß bereits bei sehr kleinen Strömungsgeschwindigkeiten ein quasistationärer Zustand erreicht wird. Diese Voraussetzung ist aber hier für die vertikale Richtung nicht mehr erfüllt. Daraus ergeben sich bei Vorhandensein von nichtvertikalen Trennflächen zwischen Luft und Grundwasserträger gewisse Schwierigkeiten, auf die jedoch hier nicht weiter eingegangen werden soll. Sind diese Flächen vertikal, so treten diese Schwierigkeiten im stationären Fall nicht auf. Da jedoch längs solcher vertikalen Flächen $\partial h/\partial z=1$ sein muß, so kann bei dem einachsig widerstandsfreien Festkörpermodell wegen (9) auf diesen Flächen keine Hangquelle auftreten; die Einmündung des Grundwasserspiegels erfolgt im stationären und instationären Fall stets in den Spiegel der ruhenden Flüssigkeit bzw. bei vollkommener Absenkung an der undurchlässigen Schicht. Im instationären Fall sind demnach Anfangsbedingungen, die eine Hangquelle beinhalten, nicht zulässig, da diese mit einer quasistationären Behandlung nicht verträglich ist. Aus dem Vorstehenden ersieht man, daß die Ausbildung einer Hangquelle in einer vertikalen Trennfläche Luft—Festkörper nur durch den Widerstand des Festkörpers in vertikaler Richtung bedingt ist, und daß daher die Anwendung des *Dupuit*schen Ansatzes auf den isotropen Festkörper bedenklich erscheinen muß.

3. Anwendung der Relaxationsmethode auf Probleme der stationären und instationären Grundwasserströmung. a) Dimensionslose Form der Gleichungen. Um die Relaxationsmethode anwenden zu können ist es zunächst zweckmäßig, die Ausgangsgleichungen in dimensionslose Form zu bringen. Wir beschränken uns hier auf einen homogenen Grundwasserträger, der isotrop oder anisotrop sein kann. In letzterem Falle setzen wir einen symmetrischen Durchlässigkeitsaffinor voraus (orthotroper Festkörper). Wir gehen aus von den Gleichungen (I, 16b)

$$k_{\xi\xi}\frac{\partial^2 h}{\partial\xi^2}+k_{\eta\eta}\frac{\partial^2 h}{\partial\eta^2}+k_{\zeta\zeta}\frac{\partial^2 h}{\partial\zeta^2}=0 \tag{12}$$

und (I, 30b)

$$-\frac{\partial\zeta_2}{\partial t}=\frac{1}{n}\left[k_{\zeta\zeta}\frac{\partial h}{\partial\zeta}-k_{\xi\xi}\frac{\partial h}{\partial\xi}\frac{\partial\zeta_2}{\partial\xi}-k_{\eta\eta}\frac{\partial h}{\partial\eta}\frac{\partial\zeta_2}{\partial\eta}\right]_{\text{längs der Spiegelfläche } \zeta=\zeta_2}, \tag{13}$$

die beide für das Hauptachsensystem (ξ, η, ζ) des Durchlässigkeitsaffinors gelten. Wegen der vorausgesetzten Homogenität des Grundwasserträgers ist n in (13) ortsunabhängig. Im anisotropen Fall geht (12) durch eine volumtreue Affinverzerrung des Bereiches vermittels der Transformationsgleichungen

$$\xi = \sqrt{\frac{k_{\xi\xi}}{\sqrt[3]{K_{\mathrm{III}}}}}\,\bar{\xi}\,, \qquad \eta = \sqrt{\frac{k_{\eta\eta}}{\sqrt[3]{K_{\mathrm{III}}}}}\,\bar{\eta}\,, \qquad \zeta = \sqrt{\frac{k_{\zeta\zeta}}{\sqrt[3]{K_{\mathrm{III}}}}}\,\bar{\zeta} \tag{14}$$

mit $K_{\mathrm{III}} = k_{\xi\xi}\, k_{\eta\eta}\, k_{\zeta\zeta}$ in die *Laplace*-Gleichung

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{\eta}^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{\zeta}^2} = 0 \tag{15}$$

über. Um die hierin auftretenden Größen dimensionslos zu machen, schreiben wir

$$h = H\, h^*\,, \qquad \bar{\xi} = H\, \xi^*\,, \qquad \bar{\eta} = H\, \eta^*\,, \qquad \bar{\zeta} = H\, \zeta^*\,, \tag{16}$$

worin H eine beliebige charakteristische Länge ist[1].

Damit geht (15) über in

$$\frac{\partial^2 h^*}{\partial \xi^{*2}} + \frac{\partial^2 h^*}{\partial \eta^{*2}} + \frac{\partial^2 h^*}{\partial \zeta^{*2}} = 0\,. \tag{15a}$$

Die gleichen Substitutionen führen wir in (13) ein und erhalten

$$-\frac{\partial \zeta_2^*}{\partial t^*} = \left[\frac{\partial h^*}{\partial \zeta^*} - \frac{\partial h^*}{\partial \xi^*}\frac{\partial \zeta_2^*}{\partial \xi^*} - \frac{\partial h^*}{\partial \eta^*}\frac{\partial \zeta_2^*}{\partial \eta^*}\right]_{\text{längs der Spiegelfläche}}. \tag{13a}$$

Die dimensionslose Zeit t^* ergibt sich hierbei zu

$$t^* = t\,\frac{\sqrt[3]{K_{\mathrm{III}}}}{H\, n}\,. \tag{13b}$$

In einem beliebig abgegrenzten Volumen des Strömungsbereiches befindet sich die Flüssigkeitsmenge $V_F = \iiint n\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$. Führt man darin die Substitution (14) ein, so erhält man $V_F = \iiint n\, d\bar{\xi}\, d\bar{\eta}\, d\bar{\zeta}$. Dies bedeutet, daß das relative Porenvolumen n bei dieser Transformation invariant bleibt.

Die auf die Zeiteinheit bezogene Flüssigkeitsmenge Q, welche ein beliebiges Flächenstück F im Innern des Grundwasserträgers durchströmt, ist gegeben durch[2]

$$Q = \int_F \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{F} = \int_{F_\xi} v_\xi\, d\eta\, d\zeta + \int_{F_\eta} v_\eta\, d\zeta\, d\xi + \int_{F_\zeta} v_\zeta\, d\xi\, d\eta\,. \tag{17}$$

Setzt man die Beziehungen

$$v_\xi = -\,k_{\xi\xi}\frac{\partial h}{\partial \xi}\,, \qquad v_\eta = -\,k_{\eta\eta}\frac{\partial h}{\partial \eta}\,, \qquad v_\zeta = -\,k_{\zeta\zeta}\frac{\partial h}{\partial \zeta}\,, \tag{18}$$

die aus (I, 10) und (I, 12) für das Hauptachsensystem folgen, unter Verwendung der Transformationen (14) und (16) in (17) ein, so erhält man

$$Q = -\,H^2\sqrt[3]{K_{\mathrm{III}}}\left[\int_{F_\xi^*} \frac{\partial h^*}{\partial \xi^*}\, d\eta^*\, d\zeta^* + \int_{F_\eta^*} \frac{\partial h^*}{\partial \eta^*}\, d\zeta^*\, d\xi^* + \int_{F_\zeta^*} \frac{\partial h^*}{\partial \zeta^*}\, d\xi^*\, d\eta^*\right] = H^2\sqrt[3]{K_{\mathrm{III}}}\, Q^*\,. \tag{17a}$$

Bei Vorhandensein eines freien Grundwasserspiegels $z_2(x, y, t)$ gilt längs diesem die Randbedingung $h = z_2$, wenn die z-Achse vertikal nach oben gerichtet ist. Fällt überdies eine Hauptachse des Durchlässigkeitsaffinors im Falle eines homogenen orthotropen Festkörpers in die z-Richtung, ist es zweckmäßig, statt (14) eine Affinverzerrung zu wählen, die die z-Koordinate unverändert läßt. Wir benutzen dann die Transformationen

$$x = \sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{zz}}}\,\bar{x}\,, \qquad y = \sqrt{\frac{k_{yy}}{k_{zz}}}\,\bar{y}\,, \qquad z = \bar{z} \tag{19a}$$

und

$$h = H\, h^*\,, \qquad \bar{x} = H\, x^*\,, \qquad \bar{y} = H\, y^*\,, \qquad \bar{z} = H\, z^*\,. \tag{19b}$$

---

[1] Alle dimensionslosen Größen sollen durch einen Stern gekennzeichnet werden.

[2] F_ξ, F_η, F_ζ bedeuten die Projektionen des Flächenstückes auf die drei Koordinatenebenen. Bei mehrfacher Überdeckung der projizierten Flächen ist die Fläche in Teilstücke mit einfachen Überdeckungen der Projektionen zu zerlegen.

Ersetzt man in (12) ξ, η, ζ durch x, y, z und benutzt die Transformationen (19a) und (19b) so erhält man

$$\frac{\partial^2 h^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 h^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}} = 0 \,. \tag{20}$$

Die Gleichung (13) geht mittels der gleichen Transformationen über in

$$- \frac{\partial z_2^*}{\partial t^*} = \left[\frac{\partial h^*}{\partial z^*} - \frac{\partial h^*}{\partial x^*}\frac{\partial z_2^*}{\partial x^*} - \frac{\partial h^*}{\partial y^*}\frac{\partial z_2^*}{\partial y^*}\right]_{\text{längs der Spiegelfläche}} ; \tag{21}$$

jedoch ergibt sich hierbei für die dimensionslose Zeit t^*

$$t^* = t\,\frac{k_{zz}}{H\,n} \,. \tag{22}$$

Da die Transformation (19a) nicht volumtreu ist, bleibt das relative Porenvolumen n hier nicht invariant. Man erhält in diesem Fall

$$V_F = \int\int\int n\,dx\,dy\,dz = \int\int\int n\,\frac{\sqrt{k_{xx}\,k_{yy}}}{k_{zz}}\,d\bar{x}\,d\bar{y}\,d\bar{z} = \int\int\int \bar{n}\,d\bar{x}\,d\bar{y}\,d\bar{z} \,;$$

daher ist

$$\bar{n} = n\,\frac{\sqrt{k_{xx}\,k_{yy}}}{k_{zz}} \,. \tag{23}$$

Die Gleichung (17) für die auf die Zeiteinheit bezogene Flüssigkeitsmenge Q geht durch Einführen von (7), (19a) und (19b) über in

$$Q = - H^2\sqrt{k_{xx}\,k_{yy}}\left[\int_{F_x^*}\int \frac{\partial h^*}{\partial x^*}\,dy^*\,dz^* + \int_{F_y^*}\int \frac{\partial h^*}{\partial y^*}\,dz^*\,dx^* + \int_{F_z^*}\int \frac{\partial h^*}{\partial z^*}\,dx^*\,dy^*\right]$$

$$= H^2\sqrt{k_{xx}\,k_{yy}}\,Q^* = H^2\,\frac{\bar{n}}{n}\,k_{zz}\,Q^* \,. \tag{24}$$

Für den isotropen Festkörper ($k_{xx} = k_{yy} = k_{zz} = k$) werden die Transformationen (14) und (19a) zu identischen Transformationen, die Gleichungen (13b) und (22) gehen beide über in

$$t^* = t\,\frac{k}{H\,n} \,, \tag{25}$$

und die Gleichungen (17a) und (24) gehen beide über in

$$Q = - H^2\,k\left[\int_{F_x^*}\int \frac{\partial h^*}{\partial x^*}\,dy^*\,dz^* + \int_{F_y^*}\int \frac{\partial h^*}{\partial y^*}\,dz^*\,dx^* + \int_{F_z^*}\int \frac{\partial h^*}{\partial z^*}\,dx^*\,dy^*\right] = H^2\,k\,Q^* \,. \tag{26}$$

b) Die Relaxationsmethode für den ebenen Fall. Um die Anwendung der Relaxationsmethode auf ebene Probleme der Grundwasserbewegung zu erläutern, wählen wir ein spezielles Beispiel. Es soll die instationäre Durchströmung eines Dammes (Abb. 2) untersucht werden. Ursprünglich habe der Flüssigkeitsspiegel zu beiden Seiten des Dammes die gleiche Höhe $z = z_2 = H$. Auf der linken Seite werde nun plötzlich die Flüssigkeit unter das Niveau $z = 0$ abgesenkt und soll auch später nie mehr das Niveau $z = 0$ erreichen. Die Spiegelhöhe auf der rechten Seite werde konstant gehalten. Das Damm-Material werde als homogen und isotrop (Durchlässigkeit k) vorausgesetzt. Demnach setzen wir

Abb. 2. Skizze zum gewählten Beispiel der instationären Durchströmung eines Dammes.

$$x = H\,x^* \,, \quad y = H\,y^* \,, \quad z = H\,z^* \,, \quad h = H\,h^* \,. \tag{27}$$

Zur Anwendung der Relaxationsmethode[1] ersetzt man bekanntlich die zu lösende Differentialgleichung durch Differenzengleichungen und überzieht die (x, z)-Ebene mit einem Netz von Geraden[2] $x^* = \mu\,a^*$, $z^* = \nu\,a^*$, wo μ und ν ganze Zahlen sind und $a = H\,a^*$ die passend zu wählende Maschenweite des Netzes bedeutet. Die zweiten Ableitungen von h^* an einem Knoten

[1] *R. V. Southwell*, Relaxation Methods in Theoretical Physics, Oxford 1946; *D. N. Allen*, Relaxation Methods, McGraw-Hill 1954.

[2] Für das betrachtete Beispiel wird ein quadratisches Netz verwendet.

(μ, ν) des Netzes werden näherungsweise ersetzt durch

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 h^*}{\partial x^{*2}}\right)_{\mu,\nu} &= \frac{1}{a^{*2}}\left(h^*_{\mu-1,\nu} - 2\,h^*_{\mu,\nu} + h^*_{\mu+1,\nu}\right),\\ \left(\frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}}\right)_{\mu,\nu} &= \frac{1}{a^{*2}}\left(h^*_{\mu,\nu-1} - 2\,h^*_{\mu,\nu} + h^*_{\mu,\nu+1}\right).\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Die *Laplace*-Gleichung für das ebene Problem geht dann bis auf einen Fehler von der Größenordnung a^{*4} über in

$$h^*_{\mu-1,\nu} + h^*_{\mu+1,\nu} + h^*_{\mu,\nu-1} + h^*_{\mu,\nu+1} - 4\,h^*_{\mu,\nu} \equiv R^*_{\mu,\nu} = 0\,. \tag{29}$$

Wenn in (29) Näherungswerte statt der Werte der gesuchten Lösung eingesetzt werden, so wird der Rest $R^*_{\mu,\nu}$ i. a. ungleich Null. Geht man von irgendwelchen Näherungswerten in den Knoten aus, so wird (29) zunächst i. a. nicht in allen Knoten erfüllt sein, und es ergeben sich gewisse Reste $R^*_{\mu,\nu}$. Durch systematisches Abändern der h^*-Werte an den Knoten können diese Reste allmählich bis zur gewünschten Genauigkeit abgebaut werden. Es ist zweckmäßig, die jeweils dem Betrag nach größten Reste abzubauen. Ändert man den Wert h^* in einem Knoten um Δh^*, so ändert sich der Rest R^* an diesem Knoten um $-4\,\Delta h^*$, die Reste in den vier umliegenden Knoten ändern sich um Δh^*, wie aus (29) leicht ersichtlich ist. Wenn in größeren Gebieten des Netzes die überwiegende Zahl der Reste gleiches Vorzeichen aufweisen, wendet man zur Erzielung rascherer Konvergenz die Verfahren des Überrelaxierens oder der Gruppen- und Blockrelaxation an[1].

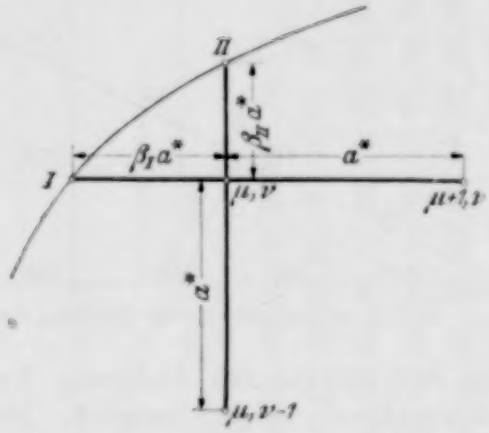


Abb. 3. Randstern mit verkürzten Abständen.

Bei Problemen der Grundwasserbewegung sind die Werte von h^* längs des Grundwasserspiegels und längs der Trennflächen des Festkörpers gegen Luft oder ruhendes Wasser vorgegeben. Am Rande können Knoten mit verkürzten Abständen gemäß Abb. 3 auftreten. In diesem Fall ist (29) zu ersetzen durch[1]

$$\frac{2}{\beta_I(1+\beta_I)}h^*_I + \frac{2}{1+\beta_I}h^*_{\mu+1,\nu} + \frac{2}{1+\beta_{II}}h^*_{\mu,\nu-1} + \frac{2}{\beta_{II}(1+\beta_{II})}h^*_{II} - \left(\frac{2}{\beta_I} + \frac{2}{\beta_{II}}\right)h^*_{\mu,\nu} = R^*_{\mu,\nu} = 0\,. \tag{29a}$$

Der Fehler liegt in der Größenordnung a^{*3}. Abänderung des Wertes $h^*_{\mu,\nu}$ um $\Delta h^*_{\mu,\nu}$ ändert den Rest $R^*_{\mu,\nu}$ nach (29a) um

$$\Delta R^*_{\mu,\nu} = -\left(\frac{2}{\beta_I} + \frac{2}{\beta_{II}}\right)\Delta h^*_{\mu,\nu}\,. \tag{29b}$$

Längs einer undurchlässigen Fläche muß grad h^* senkrecht auf die Flächennormale stehen. Bei Vorhandensein von geradlinig begrenzten undurchlässigen Schichten wählt man zweckmäßig diese Begrenzung als Netzlinie und kann sich daran das ganze Netz mit allen Knotenwerten und Resten gespiegelt denken, wodurch diese Begrenzung wie gefordert automatisch zur Stromlinie wird[2].

Es soll nunmehr die Anwendung der Relaxationsmethode auf das zu Beginn dieses Abschnittes erläuterte Beispiel der instationären Durchströmung eines Dammes gezeigt werden. Wir denken uns den Flüssigkeitsspiegel links vom Damm zur Zeit $t = 0$ plötzlich unter das Niveau $z = 0$ abgesenkt. Für diesen Zeitpunkt ermittelt man die Verteilung der Standrohrspiegelhöhe[3]. Am zweckmäßigsten beginnt man dabei mit einem weitmaschigen Netz, in das man, von den gegebenen Randwerten ausgehend, geschätzte Werte einträgt und diese durch das Relaxationsverfahren ausgleicht (Abb. 4). Die Werte h^* der bezogenen Standrohrspiegelhöhe wurden mit 10^4 multipliziert, um Dezimalzahlen zu vermeiden. Abb. 5 zeigt ein aus Abb. 4 entwickeltes feinmaschigeres Netz[4], in das auch Linien konstanter Standrohrspiegelhöhe und konstanten Druckes eingezeichnet sind.

---

[1] *Allen*, a. a. O. S. 67.

[2] *Allen*, a. a. O. S. 72. Bei krummliniger Begrenzung der undurchlässigen Schicht siehe *Allen*, a. a. O. S. 74—85.

[3] Es wird dabei angenommen, daß der Anlaufvorgang, wie er in I, S. 81 erwähnt wurde, bereits abgeklungen ist und sich ein quasistationärer Strömungszustand ausgebildet hat. Die Anlaufzeit wird als vernachlässigbar klein angesehen.

[4] *Allen*, a. a. O. S. 61.

In Abb. 5 sowie in den folgenden abgebildeten Netzen wurden alle Reste bis auf den Betrag ≤ 2 herabgedrückt. Aus der Verteilung der h^*-Werte läßt sich nun die dimensionslose Sinkgeschwindigkeit $-\partial z_2^*/\partial t^*$ in den Knotenpunkten des Spiegels aus Gleichung (13a), die für den ebenen, isotropen Fall die Form

$$-\frac{\partial z_2^*}{\partial t^*} = \left[\frac{\partial h^*}{\partial z^*} - \frac{\partial h^*}{\partial x^*}\frac{\partial z_2^*}{\partial x^*}\right]_{\text{für } z^* = z_2^*} \tag{30}$$

annimmt, berechnen, wobei t^* mit der tatsächlichen Zeit t durch die Beziehung (25) zusammenhängt. Da die Bestimmung der Differentialquotienten auf der rechten Seite von (30) auf graphische Art meist zu ungenau ist, empfiehlt es sich, diese rechnerisch aus Parabeln zweiter Ordnung zu ermitteln, die durch je drei Punkte gelegt werden. Diese Sinkgeschwindigkeiten kann man nun benutzen, um die Spiegellage zu einem etwas späteren Zeitpunkt zu ermitteln. Dabei wird angenommen, daß sich die Sinkgeschwindigkeit während kleiner Zeitintervalle nicht wesentlich ändert.

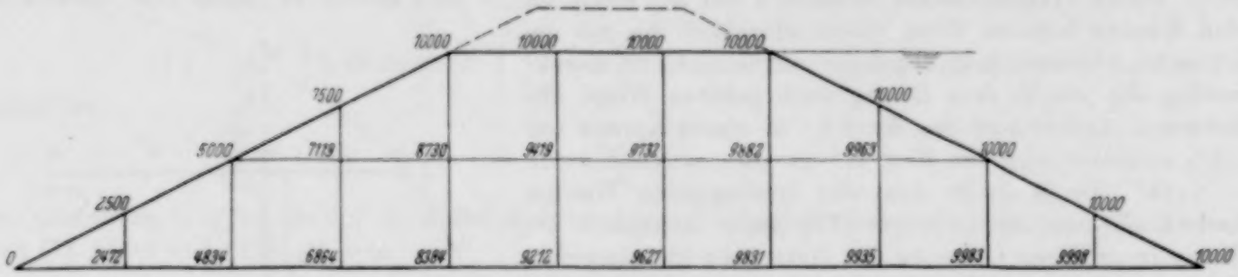


Abb. 4. Ausgangsnetz für die Verteilung der Standrohrspiegelhöhen ($10^4 \cdot h^*$) für den Anfangszustand der Sickerströmung.

Eine Abschätzung der Änderung der Sinkgeschwindigkeit bei Veränderung der Spiegelfläche ist von vornherein schwer möglich. Man wird zunächst ein Zeitintervall Δt^* so wählen, daß die Spiegeländerung Δz_2^*, die nach der Gleichung

$$\Delta z_2^* = \frac{\partial z_2^*}{\partial t^*}\,\Delta t^* \tag{31}$$

berechnet werden kann, im ganzen Bereich klein bleibt gegen die Maschenweite des Netzes. Nun wird der neue Spiegel eingezeichnet und das Netz wieder abgeglichen. Ein klein gehaltener Absenkschritt wirkt sich hierbei auch insofern vorteilhaft aus, als das neuerliche Abgleichen des Netzes wegen der geringen Veränderungen der Knotenwerte am Spiegel entsprechend rasch bewerkstelligt werden kann. Nach Abgleichen des Netzes können die neuen Sinkgeschwindigkeiten nach (30) berechnet werden. Nun hat man auch die Möglichkeit, diese Werte mit den vorhergegangenen zu vergleichen und gegebenenfalls, wenn unzulässig große Änderungen aufgetreten sein sollten, das Verfahren mit einem kleineren Wert von Δt^* zu wiederholen.

Auf diese Weise kann man nun Schritt für Schritt den Verlauf der Spiegelabsenkung verfolgen. In Abb. 6 ist eine Reihe von aufeinanderfolgenden Spiegellagen eingezeichnet, die auf diese Weise bestimmt wurden. Die zugehörigen Zeitintervalle sind zwischen den Spiegellagen eingetragen[1].

Da der Übergang zur stationären Spiegellage asymptotisch erfolgt, kann dieses Verfahren nicht bis zur Erreichung des stationären Zustandes fortgesetzt werden. Wenn die Sinkgeschwindigkeit nach (30) im ganzen Bereich sehr kleine Werte erreicht hat, empfiehlt es sich, von hier aus die Lage des stationären Spiegels nach der Bedingung aufzusuchen, daß dieser überall auf den Linien $h^* = \text{konst.}$ senkrecht stehen muß, weil ein stationärer Spiegel Stromlinienfläche ist. Dabei ergibt sich auch die Lage der Hangquelle. Abb. 7 zeigt die auf diese Art gefundene stationäre Spiegellage sowie die Verteilung der Standrohrspiegelhöhen und Linien $h^* = \text{konst.}$

Man ist nun auch in der Lage, die auf die Raumeinheit bezogene Resultante $\nabla \cdot \mathfrak{S}$ der Schnittkräfte im Festkörperskelett zu ermitteln. Diese Größe ist für die Beurteilung der Rutschungsgefahr maßgebend. Nach Gleichung (II, 9) gilt:

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} = \lambda\,\Delta p + \frac{\gamma_k - n\,(\gamma_k - \gamma_w)}{g}\,\Delta U + p\,\Delta\lambda\,. \tag{32}$$

Hierin ist $\mathfrak{S}$ der Spannungstensor für das Festkörperskelett, λ das Verhältnis des von Flüssigkeit bedeckten Anteiles einer Schnittfläche zur gesamten Schnittfläche ($\mathfrak{S}$ und λ hängen von der Schnittführung ab); γ_k bzw. γ_w sind die spezifischen Gewichte von Festkörpermaterial bzw. Flüssigkeit; n ist das relative Porenvolumen und U das Potential der Massenkräfte je Masseneinheit.

[1] *E. P. Nemecek*, a. a. O., hat die instationäre Durchströmung eines Dammes im Modellversuch verfolgt.

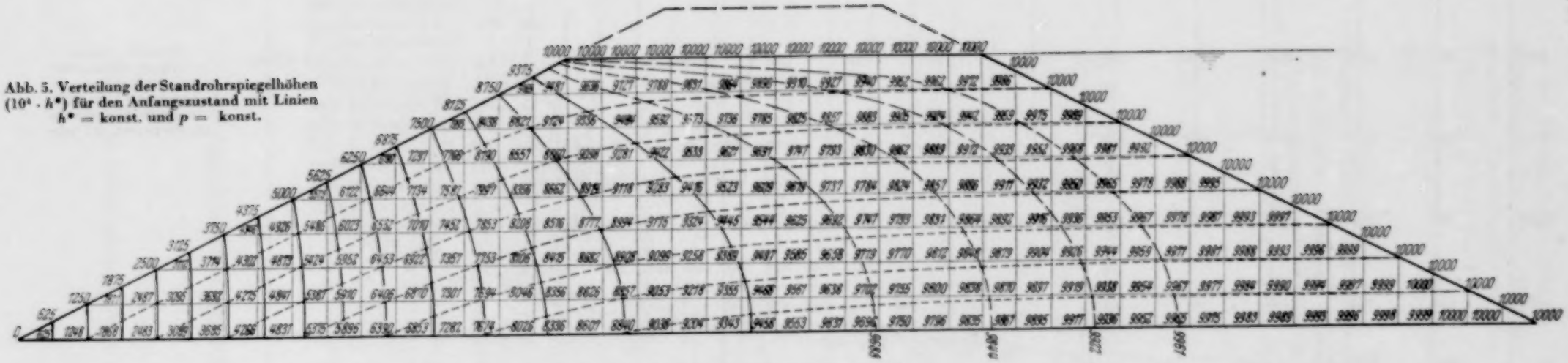


Abb. 5. Verteilung der Standrohrspiegelhöhen ($10^4 \cdot h^*$) für den Anfangszustand mit Linien $h^* =$ konst. und $p =$ konst.

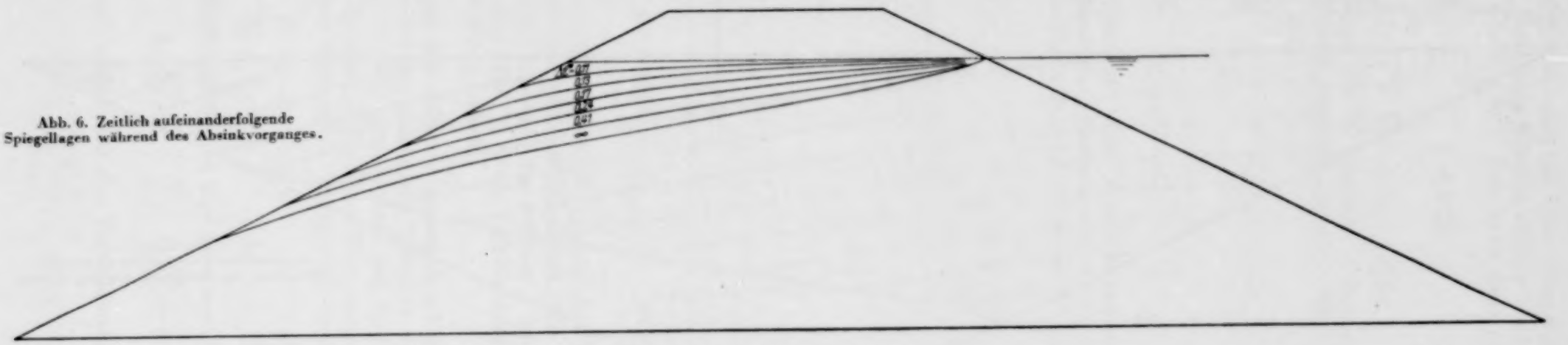


Abb. 6. Zeitlich aufeinanderfolgende Spiegellagen während des Absinkvorganges.

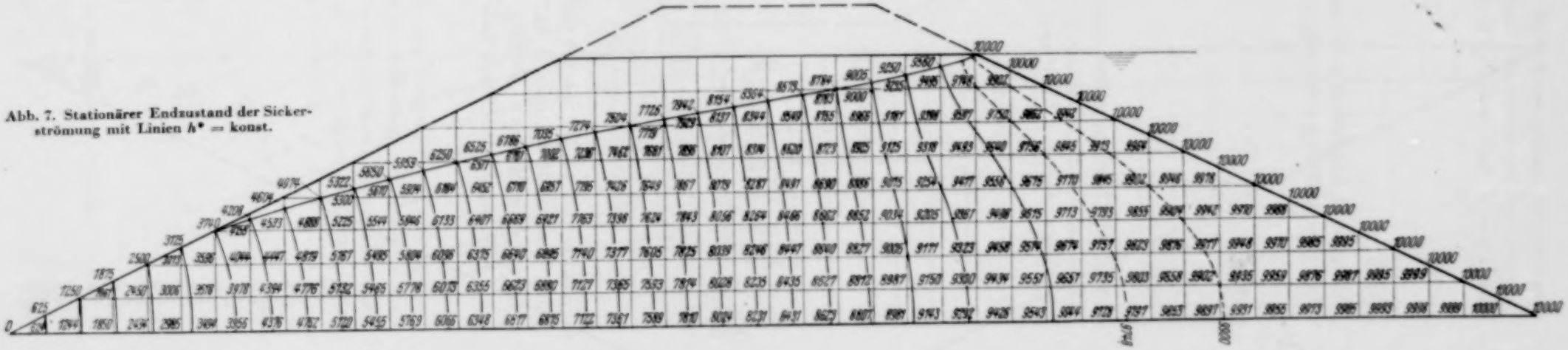


Abb. 7. Stationärer Endzustand der Sickerströmung mit Linien $h^* =$ konst.

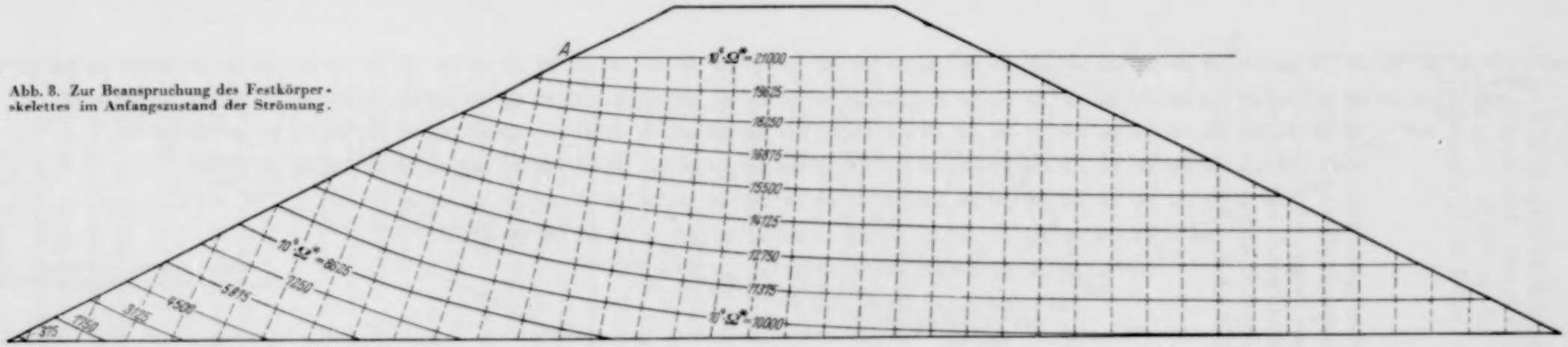


Abb. 8. Zur Beanspruchung des Festkörperskelettes im Anfangszustand der Strömung.

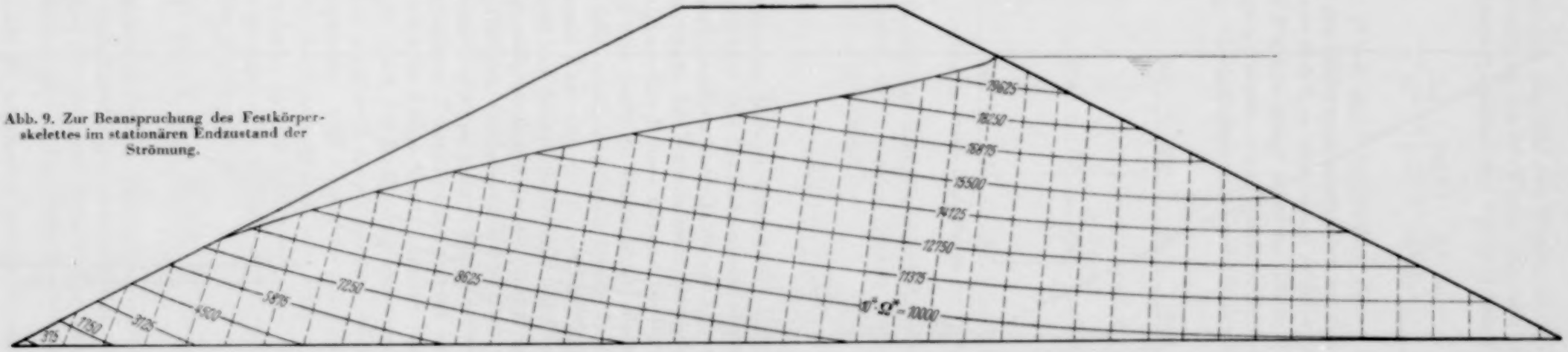


Abb. 9. Zur Beanspruchung des Festkörperskelettes im stationären Endzustand der Strömung.

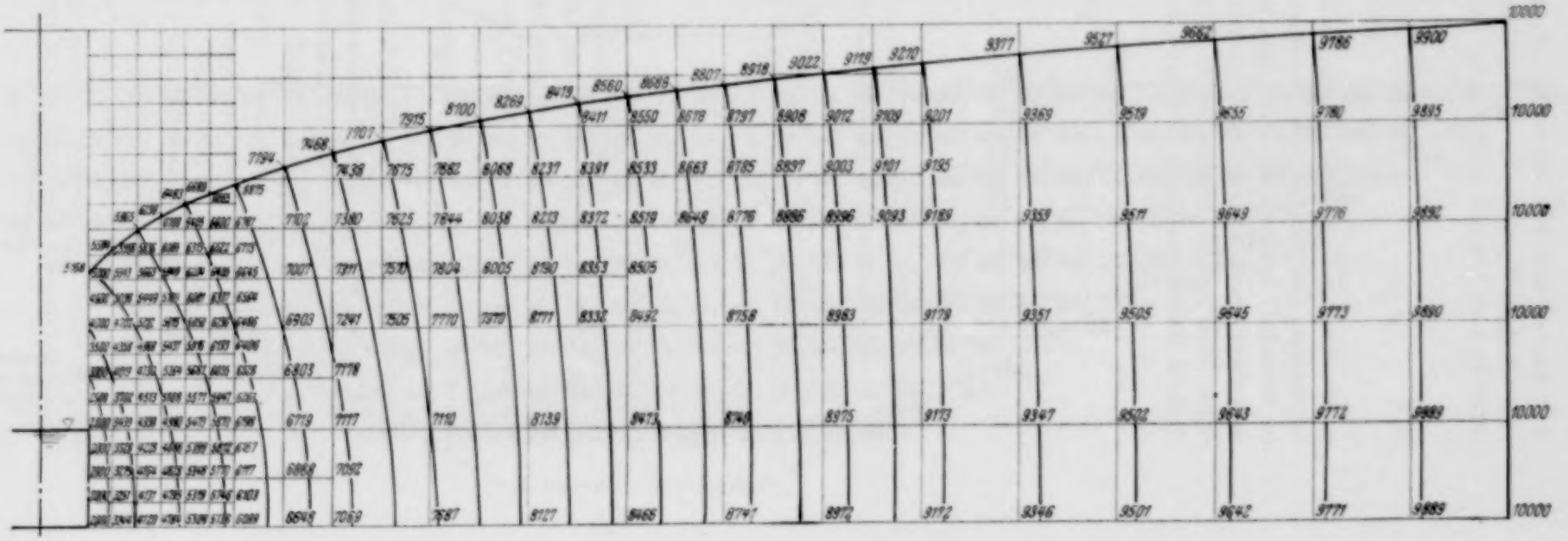


Abb. 13. Verteilung der Standrohrspiegelhöhen ($10^4 \cdot h^*$) und Linien $h^* =$ konst. für den stationären Zufluß zu einem Brunnen.

Bei körniger Struktur des Festkörpers sind zur Beurteilung der Rutschungsgefahr Schnitte zu betrachten, die die Körner des Festkörperskelettes nicht schneiden. Für solche ist bei vorausgesetzter Punktberührung der Körner $\lambda = 1$. Man kann dann für $n = \text{konst.}$ und $U = g\,z$ die Gleichung (32) in der Form

$$V \cdot \mathfrak{S} = V\Omega \tag{33}$$

mit

$$\Omega = p + [\gamma_k - n\,(\gamma_k - \gamma_w)]\,z \tag{33a}$$

schreiben. Um ein Bild der Verteilung von $V\Omega$ zu gewinnen, kann man die Kurvenschar $\Omega = \text{konst.}$ mit konstanter Differenz des Kurvenparameters zeichnen. Mit $h = p/\gamma_w + z$ und (27) läßt sich (33a) in dimensionslose Form bringen

$$\frac{\Omega}{H\,\gamma_w} = \Omega^* = h^* + \varkappa\, z^* \tag{33b}$$

mit

$$\varkappa = (1 - n)\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_w} - 1\right). \tag{33c}$$

In Abb. 8 und 9 wurden die Linien $\Omega^* = \text{konst.}$ und die zugehörigen orthogonalen Trajektorien für den Ausgangszustand bzw. stationären Endzustand der Strömung eingezeichnet. Dabei wurde $\varkappa = 1{,}1$ gewählt, ein Wert, der sandigem Material entspricht. Da die Linien $\Omega^* = \text{konst.}$ in gleichen

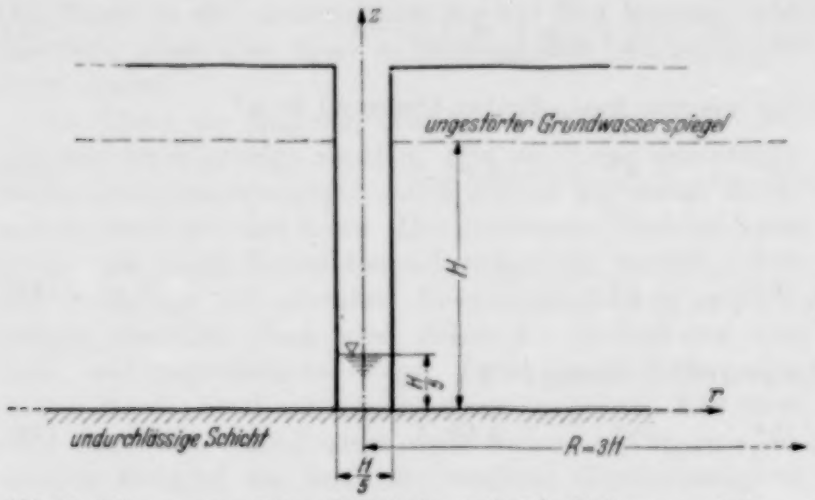


Abb. 10. Skizze zum gewählten Beispiel des stationären Zuflusses zu einem Brunnen.

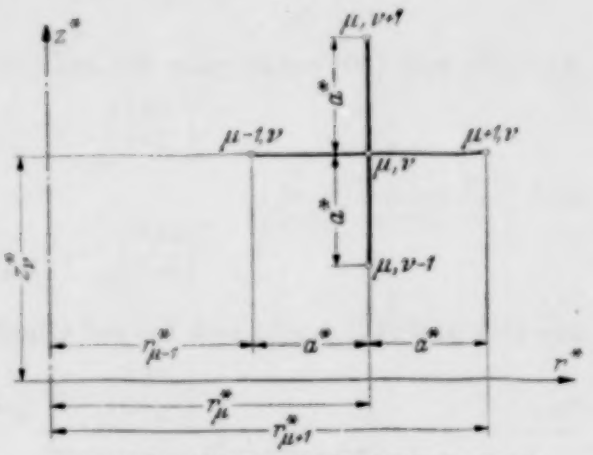


Abb. 11. Zur Ableitung der Knotengleichungen für rotationssymmetrische Netze.

Intervallen gestaffelt sind, ist ihr Normalabstand ein reziprokes Maß für die auf die Raumeinheit bezogene Resultante der Schnittkräfte im Festkörperskelett. Wie Abb. 8 zeigt, ist diese Resultante zu Beginn der Absenkung in der Umgebung des Punktes A am größten, während sie nach Erreichung des stationären Zustandes (Abb. 9) ziemlich gleichmäßig über den Strömungsbereich verteilt ist und nicht mehr so hohe Werte erreicht.

4. Die Relaxationsmethode für den zylindersymmetrischen Fall. Als Beispiel für eine zylindersymmetrische Strömung wählen wir den stationären Zufluß zu einem vollkommenen Brunnen mit begrenzter Reichweite R (Abb. 10). Wir setzen voraus, daß die Durchlässigkeiten ortsunabhängig sind und für alle horizontalen Richtungen denselben Wert besitzen. In vertikaler Richtung kann die Durchlässigkeit einen anderen Wert haben. Demgemäß setzen wir in (12)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\,, \qquad \eta = y\,, \qquad \zeta = z\,, \\ k_{\xi\xi} &= k_{\eta\eta} = k_{rr}\,, \qquad k_{\zeta\zeta} = k_{zz}\,. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Durch Transformation auf Zylinderkoordinaten wird dann aus (12)

$$k_{rr}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial h}{\partial r}\right) + k_{zz}\,\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0\,. \tag{35}$$

Da die z-Achse ausgezeichnet ist, wenden wir eine Transformation analog zu (19a) an:

$$r = \sqrt{\frac{k_{rr}}{k_{zz}}}\,\bar{r}\,, \qquad z = \bar{z} \tag{36}$$

und führen dimensionslose Größen h^*, r^*, z^* nach den Gleichungen

$$h = H\,h^*\,, \quad \bar{r} = H\,r^*\,, \quad \bar{z} = H\,z^* \tag{37}$$

ein. Mit (36) und (37) wird aus (35):

$$\frac{\partial^2 h^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial h^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}} = 0\,. \tag{38}$$

Zur Anwendung der Relaxationsmethode überziehen wir den Meridianschnitt mit einem Netz von äquidistanten Geraden $r^*_\mu = \mu\,a^*$, $z^*_\nu = \nu\,a^*$, wobei $a = H\,a^*$ die Maschenweite bedeutet.

Um in einheitlicher Weise die Knotenpunktsgleichungen sowohl für Sterne mit gleichen als auch ungleichen Abständen abzuleiten[1], entwickeln wir die Funktion $h^*(r^*, z^*)$ im Knotenpunkt (μ, ν) in eine *Taylor*-Reihe (Abb. 11). Wenn wir nach dem dritten Glied abbrechen, erhalten wir für die Werte h^* in den Nachbarknoten die folgenden Darstellungen:

$$h^*_{\mu+1,\nu} = h^*_{\mu,\nu} + \left(\frac{\partial h^*}{\partial r^*}\right)_{\mu,\nu} a^* + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h^*}{\partial r^{*2}}\right)_{\mu,\nu} a^{*2} + \cdots, \tag{39}$$

$$h^*_{\mu-1,\nu} = h^*_{\mu,\nu} - \left(\frac{\partial h^*}{\partial r^*}\right)_{\mu,\nu} a^* + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h^*}{\partial r^{*2}}\right)_{\mu,\nu} a^{*2} - \cdots, \tag{40}$$

$$h^*_{\mu,\nu+1} = h^*_{\mu,\nu} + \left(\frac{\partial h^*}{\partial z^*}\right)_{\mu,\nu} a^* + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}}\right)_{\mu,\nu} a^{*2} + \cdots, \tag{41}$$

$$h^*_{\mu,\nu-1} = h^*_{\mu,\nu} - \left(\frac{\partial h^*}{\partial z^*}\right)_{\mu,\nu} a^* + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}}\right)_{\mu,\nu} a^{*2} - \cdots. \tag{42}$$

Aus (39) und (40) erhält man bis auf Glieder vierter, bzw. dritter Ordnung in a^*

$$\left(\frac{\partial^2 h^*}{\partial r^{*2}}\right)_{\mu,\nu} = \frac{1}{a^{*2}}\left(h^*_{\mu+1,\nu} + h^*_{\mu-1,\nu} - 2\,h^*_{\mu,\nu}\right) \tag{43}$$

und

$$\left(\frac{\partial h^*}{\partial r^*}\right)_{\mu,\nu} = \frac{1}{2\,a^*}\left(h^*_{\mu+1,\nu} - h^*_{\mu-1,\nu}\right); \tag{44}$$

aus (41) und (42) ergibt sich bis auf Glieder vierter Ordnung in a^*

$$\left(\frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}}\right)_{\mu,\nu} = \frac{1}{a^{*2}}\left(h^*_{\mu,\nu+1} + h^*_{\mu,\nu-1} - 2\,h^*_{\mu,\nu}\right). \tag{45}$$

Setzt man (43), (44), (45) in die Differentialgleichung (38) ein, so erhält man nach Multiplikation mit a^{*2} bis auf Größen dritter Ordnung in a^*

$$\left(1 - \frac{a^*}{2\,r^*_\mu}\right)h^*_{\mu-1,\nu} + \left(1 + \frac{a^*}{2\,r^*_\mu}\right)h^*_{\mu+1,\nu} + h^*_{\mu,\nu-1} + h^*_{\mu,\nu+1} - 4\,h^*_{\mu,\nu} \equiv R^*_{\mu,\nu} = 0\,. \tag{46}$$

Gleichung (46) muß für alle regulären Knoten erfüllt werden.

Wird im Zuge des Relaxationsverfahrens der Wert $h^*_{\mu,\nu}$ um $\Delta h^*_{\mu,\nu}$ abgeändert, so ändert sich der Rest $R^*_{\mu,\nu}$ um

$$\Delta R^*_{\mu,\nu} = -\,4\,\Delta h^*_{\mu,\nu}\,. \tag{47}$$

Durch Anschreiben der der Gleichung (46) entsprechenden Knotengleichungen für die vier umliegenden Knotenpunkte erkennt man, daß die obige Änderung von $h^*_{\mu,\nu}$ um $\Delta h^*_{\mu,\nu}$ folgende Abänderung der Reste in diesen Nachbarknoten erfordert:

$$\Delta R^*_{\mu-1,\nu} = \left(1 + \frac{a^*}{2\,r^*_{\mu-1}}\right)\Delta h^*_{\mu,\nu}\,, \tag{48}$$

$$\Delta R^*_{\mu+1,\nu} = \left(1 - \frac{a^*}{2\,r^*_{\mu+1}}\right)\Delta h^*_{\mu,\nu}\,, \tag{49}$$

$$\Delta R^*_{\mu,\nu-1} = \Delta R^*_{\mu,\nu+1} = \Delta h^*_{\mu,\nu}\,. \tag{50}$$

Am Rand des Bereiches können Sterne mit höchstens zwei verkürzten oder verlängerten Abständen auftreten (Abb. 12). In diesem Fall bleiben (39) und (42) unverändert, während (40) bzw. (41) zu

[1] Für Sterne mit ungleichen Abständen findet sich beim zylindersymmetrischen Fall im Schrifttum keine Knotengleichung, die an Genauigkeit der Formel für normale Sterne entspricht.

ersetzen sind durch

$$h_{\mathrm{I}}^{*} = h_{\mu,\nu}^{*} - \left(\frac{\partial h^{*}}{\partial r^{*}}\right)_{\mu,\nu} \beta_{\mathrm{I}}\, a^{*} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{2} h^{*}}{\partial r^{*2}}\right)_{\mu,\nu} (\beta_{\mathrm{I}}\, a^{*})^{2} - \cdots \tag{40a}$$

bzw.

$$h_{\mathrm{II}}^{*} = h_{\mu,\nu}^{*} + \left(\frac{\partial h^{*}}{\partial z^{*}}\right)_{\mu,\nu} \beta_{\mathrm{II}}\, a^{*} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{2} h^{*}}{\partial z^{*2}}\right)_{\mu,\nu} (\beta_{\mathrm{II}}\, a^{*})^{2} + \cdots . \tag{41a}$$

Berechnet man aus (39) und (40a) die Werte $\left(\frac{\partial^{2} h^{*}}{\partial r^{*2}}\right)_{\mu,\nu}$ und $\left(\frac{\partial h^{*}}{\partial r^{*}}\right)_{\mu,\nu}$ sowie aus (41a) und (42) den Wert $\left(\frac{\partial^{2} h^{*}}{\partial z^{*2}}\right)_{\mu,\nu}$ und setzt diese in (38) ein, so ergibt sich nach Multiplikation mit a^{*2} bis auf Größen dritter Ordnung in a^{*}

$$\frac{2}{(1+\beta_{\mathrm{I}})\beta_{\mathrm{I}}}\left(1 - \frac{a^{*}}{2\, r_{\mu}^{*}}\right) h_{\mathrm{I}}^{*} + \frac{2}{1+\beta_{\mathrm{I}}}\left(1 + \frac{a^{*}}{2\, r_{\mu}^{*}}\beta_{\mathrm{I}}\right) h_{\mu+1,\nu}^{*} + \frac{2}{1+\beta_{\mathrm{II}}}\, h_{\mu,\nu-1}^{*}$$
$$+ \frac{2}{(1+\beta_{\mathrm{II}})\beta_{\mathrm{II}}}\, h_{\mathrm{II}}^{*} - 2\left(\frac{1}{\beta_{\mathrm{I}}} + \frac{1}{\beta_{\mathrm{II}}} - \frac{a^{*}}{2\, r_{\mu}^{*}}\,\frac{1-\beta_{\mathrm{I}}}{\beta_{\mathrm{I}}}\right) h_{\mu,\nu}^{*} \equiv R_{\mu,\nu}^{*} = 0 . \tag{46a}$$

Abänderung des Wertes $h_{\mu,\nu}^{*}$ um $\Delta h_{\mu,\nu}^{*}$ ändert den Rest $R_{\mu,\nu}^{*}$ um

$$\Delta R_{\mu,\nu}^{*} = -2\left(\frac{1}{\beta_{\mathrm{I}}} + \frac{1}{\beta_{\mathrm{II}}} - \frac{a^{*}}{2\, r_{\mu}^{*}}\,\frac{1-\beta_{\mathrm{I}}}{\beta_{\mathrm{I}}}\right)\Delta h_{\mu,\nu}^{*} . \tag{47a}$$

Die Reste in den anliegenden Knoten im Inneren des Bereiches ändern sich dabei gemäß (49) und (50), wenn diese Knoten Mittelpunkte von regulären Sternen sind.

An Hand des eingangs erwähnten Beispiels (Abb. 10) soll nun kurz gezeigt werden, wie die Lage des stationären Grundwasserspiegels beim Zufluß zu einem Brunnen ermittelt werden kann. Der stationäre Zustand kann immer als jener Grenzzustand aufgefaßt werden, dem eine beliebige instationäre Ausgangsströmung asymptotisch zustrebt. Man wird daher am einfachsten von einer auf irgendeinem Wege gewonnenen Näherungslösung für die stationäre Spiegellage ausgehen. Für diese wird das Netz ausrelaxiert und daraus analog wie im vorigen Beispiel die noch vorhandene Geschwindigkeit des Spiegels aus der Beziehung

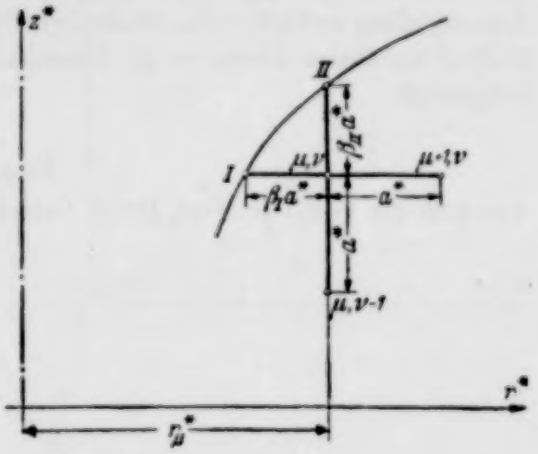


Abb. 12. Randstern mit verkürzten Abständen im rotationssymmetrischen Netz.

$$\frac{\partial z_{\mathrm{g}}^{*}}{\partial t^{*}} = \left[-\frac{\partial h^{*}}{\partial z^{*}} + \frac{\partial h^{*}}{\partial r^{*}}\,\frac{\partial z_{\mathrm{g}}^{*}}{\partial r^{*}}\right]_{z^{*}=z_{\mathrm{g}}^{*}} \tag{51}$$

ermittelt. Gleichung (51) folgt aus (21) durch Transformation auf Zylinderkoordinaten. t^{*} ist dabei durch (22) definiert. Analog wie im vorigen Beispiel kann die Annäherung des Spiegels an die stationäre Endlage in einigen Schritten verfolgt werden. Die endgültige Festlegung des stationären Spiegels kann schließlich wieder mit Hilfe der Bedingung erfolgen, daß dieser auf den Linien $h^{*} = \text{konst.}$ senkrecht stehen muß. Abb. 13 zeigt einen auf diese Art ermittelten stationären Spiegel[1]. Es sind die Linien $h^{*} = \text{konst.}$ eingezeichnet. Die in der Zeiteinheit dem Brunnen zufließende Wassermenge kann nun leicht ermittelt werden. Die Flüssigkeitsmenge Q, die in der Zeiteinheit durch eine Zylinderfläche mit dem Halbmesser r hindurchtritt, ist

$$Q = 2\pi\, r\, k_{rr} \int_{z=0}^{z_{\mathrm{g}}} \frac{\partial h}{\partial r}\, dz . \tag{52}$$

Mit (36) und (37) ergibt sich daraus

$$\frac{Q}{H^{2}\, k_{rr}} = Q^{*} = 2\pi\, r^{*} \int_{z^{*}=0}^{z_{\mathrm{g}}^{*}} \frac{\partial h^{*}}{\partial r^{*}}\, dz^{*} . \tag{53}$$

[1] Für fünf verschiedene Absenkungen des Wasserspiegels im Brunnenschacht hat *H. Schmidt* nach der hier entwickelten Methode die stationäre Lage des Grundwasserspiegels und die zugehörigen Entnahmemengen ermittelt. (Über eine Anwendung der Relaxationsmethode zur Behandlung von Grundwasserströmungen, Diss. T. H. Wien, 1956.)

Die Größe Q^* muß, im stationären Fall, von r^* unabhängig sein. Dies kann als Kontrolle benützt werden. Das obige Integral kann, etwa nach der *Simpson*schen Regel, leicht ausgewertet werden. Für das durchgeführte Beispiel ergab sich $Q^* = 0{,}864$.

Die numerischen Berechnungen zu den angegebenen Beispielen wurden mit einer vollautomatischen Rechenmaschine durchgeführt. Es wäre jedoch empfehlenswert, für Aufgaben dieser Art elektronische Rechengeräte einzusetzen. Man könnte in diesem Fall entweder die Differenzengleichungen für die einzelnen Knoten als lineares Gleichungssystem einer Lösung zuführen oder man benutzt zur Lösung der Potentialgleichung die sog. Monte-Carlo-Methode[1]. Diese hat den Vorteil, daß man mit ihrer Hilfe den Wert der Potentialfunktion in einem beliebig vorgegebenen Knoten des Bereiches ermitteln kann, ohne daß es nötig ist, die Potentialwerte in den übrigen Knoten zu berechnen. Da für die Ermittlung der Absinkgeschwindigkeit des Spiegels nur die Ableitung der Potentialfunktion am Spiegel selbst benötigt wird, könnte man auf diese Weise die Berechnung der Werte im Inneren des Bereiches vermeiden, sofern sie nicht aus anderen Gründen von Interesse sind.

5. Zusammenfassung. Im Anschluß an zwei vorangegangene Arbeiten, in denen Grundlagen für die Behandlung von stationären und instationären Grundwasserströmungen entwickelt wurden, wird hier die Anwendung auf praktische Probleme der Grundwasserströmungen gezeigt. Nach einer kritischen Betrachtung der *Dupuit*schen Näherungslösung werden die Grundgleichungen der instationären Grundwasserbewegung zur Anwendung der Relaxationsmethode auf dimensionslose Form gebracht. Am Beispiel der instationären Durchströmung eines Dammes wird die Anwendung der Relaxationsmethode auf ebene Probleme erläutert und zugleich gezeigt, wie man sich ein Bild von der Beanspruchung des Festkörperskelettes verschaffen kann. Als Beispiel für die Lösung eines zylindersymmetrischen Problems mittels der Relaxationsmethode wird der stationäre Zufluß zu einem Brunnen als Grenzfall, dem eine instationäre Strömung asymptotisch zustrebt, behandelt.

(Eingegangen am 25. März 1957.)

Anschrift der Verfasser: Prof. Dr. *G. Heinrich* und Dr. *K. Desoyer*, Wien IV, Karlsplatz 13, Technische Hochschule

[1] Siehe z. B. *Ed. F. Beckenbach*, Modern Mathematics for the Engineer, S. 293ff., McGraw-Hill 1956 (dort weitere Literaturangaben).

Auswanderungserscheinungen in Schwingungsmeßgeräten

Von **F. Weidenhammer**

1. Fragestellung. Bei Schwingungsmeßgeräten und Anzeigegeräten, deren mechanische Systeme aus einem Drehschwinger bestehen (Abb. 1), ist eine unerwünschte Auswanderungserscheinung seit etwa 20 Jahren bekannt[1]. Unter der Wirkung von Erschütterungen können diese Drehschwinger erzwungene Schwingungen um Mittellagen ausführen, die nicht die vorgesehenen ursprünglichen statischen Ruhelagen sind. Das Meßsystem wandert aus dem Sollwert seiner Mittellage aus und liefert unbrauchbare Anzeigen. Diese Erscheinung tritt dann auf, wenn die von der Erschütterung an der Drehmasse geweckten Trägheitskräfte nennenswert in das Kräftespiel eingreifen. Bei ständig wachsender Erschütterungsamplitude und -frequenz kann schließlich ein Moment der Trägheitskräfte mit einem zeitlichen Mittelwert von so großem Betrage erzeugt werden, daß der Drehschwinger vollständig in die Erschütterungsrichtung hineingezogen wird, falls nicht Anschläge den Größtausschlag zuvor begrenzen. Für das erschütterte Pendel im Schwerefeld ist diese Erscheinung aus zahlreichen theoretischen und einigen experimentellen Untersuchungen seit langem bekannt[2]. Die Ergebnisse dieser Arbeiten können allerdings nicht unmittelbar für Schwingungsmeßgeräte und Anzeigegeräte verwertet werden, da bei diesen Geräten das Rückstellmoment durch eine Feder und nicht durch das Schwerefeld allein geliefert wird.

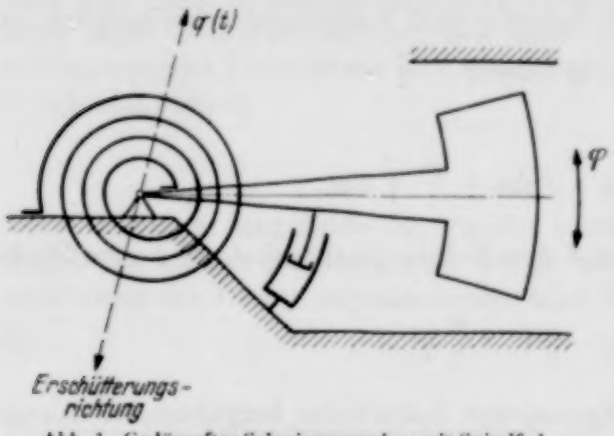


Abb. 1. Gedämpfter Schwingweggeber mit Spiralfeder und Ausschlagbegrenzung.

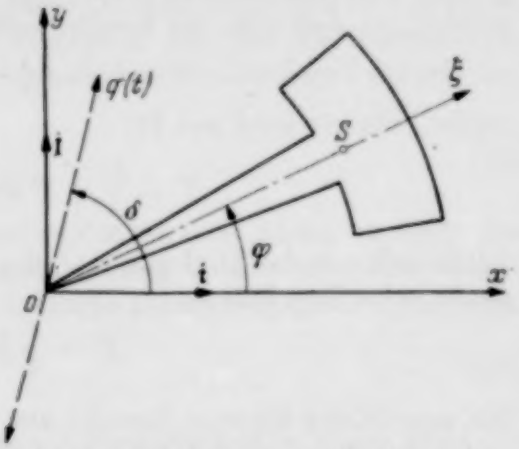


Abb. 2. Der Drehschwinger im Koordinatensystem.

Diese geschilderte Art des kinetischen Versagens ist bei Gerätezeigern (wie z. B. den Milliamperemetern) nur durch die Erschütterung als Störung bedingt und könnte an sich durch eine geeignete Schwingungsabschirmung stets behoben werden. Praktisch findet diese Möglichkeit der Entstörung allerdings auf Grund der meist beengten Platzverhältnisse schnell eine Grenze, so daß auch in diesem Falle eine genaue Kenntnis der Auswanderungsvorgänge wichtig ist. Bei Schwingungsmeßgeräten mit einem Drehschwinger ist grundsätzlich keine Abhilfe möglich, da das Versagen im mechanischen Prinzip des Meßsystems begründet liegt. Nur der Übergang auf ein translatorisch arbeitendes Meßsystem könnte hier das Auswandern verhindern. Da jedoch Schwingwegmeßgeräte nur dann eine verzerrungsfreie Anzeige liefern, wenn sie tief abgestimmt sind, muß man Geräte mit möglichst kleinen Geräteeigenfrequenzen bauen. Aber gerade diese unumgängliche Forderung an das Meßgerät verlangt konstruktiv fast immer den Übergang auf drehschwingende Horizontalpendel mit großer Drehmasse und weichen Spiralfedern. Im weiteren wird daher nur von Schwingungsmeßgeräten dieses Types die Rede sein, obgleich alle folgenden Ergebnisse auch für Anzeigegeräte mit einem drehschwingungsfähigen System der gleichen Art gelten.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist die Berechnung der Mittellagen der eintretenden erzwungenen Schwingungen abhängig von Frequenz und Amplitude der Erschütterung und den gegebenen mechanischen Gerätedaten. Diese Mittellagen werden sich im allgemeinen in der unmittelbaren Nähe der statischen Ruhelage finden. Bei wachsenden Erschütterungsintensitäten

[1] *F. v. Grundherr* und *K. Klotter*, Jb. dtsch. Luftf.-Forschung 1938, S. 631.

[2] Zusammenfassende Darstellung bei *K. Klotter*, Technische Schwingungslehre, 2. Aufl., S. 376, Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1951.

können jedoch die erzwungenen Schwingungen um diese Lagen instabil werden, so daß ersatzweise Schwingungen um ganz anders gelegene Mittellagen eintreten. Die Berechnung der möglichen erzwungenen Schwingungen ist daher durch eine Untersuchung ihrer Stabilität zu ergänzen.

2. Die Bewegungsgleichung. Als Bewegungsgleichung eines Drehschwingers mit Federrückstellung (Abb. 1) hat man streng eine partielle Differentialgleichung für die Schwingungen des Federkontinuums aufzustellen und den angehängten starren Pendelkörper und seine Bewegungsmöglichkeit in einer nichtlinearen zeitabhängigen Randbedingung zu berücksichtigen. Da jedoch eine derartige Formulierung des Problems kaum Aussicht auf eine Lösung bietet, werden entsprechend den Gepflogenheiten der Schwingungslehre die Trägheitseigenschaften der Feder vernachlässigt. Dann bleibt ein Drehschwingungsproblem mit einem Freiheitsgrad bestehen, und die entstehende Bewegungsgleichung wird eine gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichung, deren Lösung näherungsweise möglich ist.

Um die Bewegungsgleichung für einen Schwinger gemäß Abb. 2 aufzustellen, werden die *Lagrange*schen Gleichungen herangezogen. Als Koordinate wird der Winkelausschlag $\varphi(t)$ gegen die Horizontale benutzt. Die Erschütterung des Gerätes wird durch $q(t)$ in ihrer Weg–Zeit-Abhängigkeit beschrieben und erfolge geradlinig unter dem Winkel δ gegen die Horizontale. Um dann zunächst die kinetische Energie T angeben zu können, hat man das Integral

$$T = \frac{1}{2} \int_{(m)} \mathfrak{v}^2 \, dm \tag{1}$$

über alle Massenelemente dm des Pendelkörpers auszuwerten. Zu dem Zweck werden vorübergehend eine Koordinate ξ auf dem Pendelkörper und die beiden Achseneinheitsvektoren $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ eingeführt, so daß sich der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ aus Relativ- und Führungsgeschwindigkeit zu

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\,(-\xi\,\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{q}\cos\delta) + \mathfrak{j}\,(\xi\,\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{q}\sin\delta)$$

ergibt. Damit wird aus (1)

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \int \xi^2 \, dm + \sin(\delta - \varphi)\,\dot{\varphi}\,\dot{q} \int \xi \, dm + \frac{\dot{q}^2}{2} \int dm \,,$$

wofür sich mit der Drehmasse J, der Gesamtmasse M und dem Schwerpunktsabstand s vom Drehpunkt schreiben läßt:

$$T = \frac{J}{2}\,\dot{\varphi}^2 + s\,M \sin(\delta - \varphi) \cdot \dot{\varphi}\,\dot{q} + \frac{M}{2}\,\dot{q}^2 \,. \tag{2}$$

Die potentielle Energie besteht aus einem von der aufgezogenen Spiralfeder herrührenden Anteil und der Arbeit, die bei Bewegung des Pendelkörpers gegen das Schwerefeld zu leisten ist. Es gilt also

$$V = V_0 + \frac{c}{2}\,(\varphi - \varphi_F)^2 + M\,g\,s\sin\varphi \,, \tag{3}$$

wenn V_0 einen belanglosen Energiebetrag bezeichnet, der weder von φ noch von $\dot{\varphi}$ abhängt. Für die Spiralfeder wird in (3) das *Hooke*sche Gesetz als geltend angenommen, so daß c die Drehfederkonstante bezeichnet und φ_F den konstanten Winkel angibt, für den die Drehfeder spannungslos wird. Dieser Federaufzugswinkel bestimmt sich aus der Forderung, daß das Pendel die horizontale Lage als statische Ruhelage haben soll. Aus der Momentengleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = c\,(\varphi - \varphi_F) + M\,g\,s\cos\varphi = 0$$

ergibt sich für diese Ruhelage $\varphi_{0\,\mathrm{Stat.}} = 0$ der erforderliche Federaufzugswinkel zu:

$$\varphi_F = \frac{M\,g\,s}{c} \,. \tag{4}$$

In den Formeln wird jedoch weiterhin φ_F nicht durch den Sollwert (4) ersetzt, da sich etwaige durch Einbaufehler bedingte Abweichungen von diesem Sollwert als sehr wesentlich für die Stabilitätsaussagen erweisen werden.

Die bei Schwingungsmeßgeräten angestrebte geschwindigkeitsproportionale Dämpfung wird durch das Moment

$$Q = -\,b\,\dot{\varphi} \tag{5}$$

mit der Dämpfungsmomentenkonstanten b in die Rechnung aufgenommen.

Die *Lagrange*sche Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q$$

mit dem aus (2) und (3) zu bildendem kinetischen Potential $L = T - V$ liefert nun mit dem Dämpfungsmoment (5) die Bewegungsgleichung des Drehschwingers in der Form

$$J\,\ddot{\varphi} + b\,\dot{\varphi} + c\,(\varphi - \varphi_F) + M\,g\,s\cos\varphi + s\,M\,\ddot{q}\sin(\delta - \varphi) = 0\,. \tag{6}$$

Die Erschütterungsfunktion $q(t)$ wird darin als periodisch mit der Erregerfrequenz ω und der Amplitude q_0 vorausgesetzt. Dann ist

$$q(t) = q_0\,\Pi(t)\,, \tag{7}$$

worin für rein harmonische Erschütterung einfach $\Pi(t) = \cos\omega\,t$ zu setzen ist. Im allgemeinen Falle tritt jedoch in (7) für $\Pi(t)$ eine Fourierreihe auf.

Nach Division durch die Drehmasse J erkennt man in der Schwingungsgleichung (6) in

$$\omega_F = \sqrt{\frac{c}{J}} \tag{8}$$

die Eigenkreisfrequenz für ungedämpfte kleine Schwingungen des Pendels um die horizontale Gleichgewichtslage. Diese Frequenz ist als Geräteeigenfrequenz besonders wichtig. Mit der reduzierten Pendellänge l tritt eine weitere Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g\,M\,s}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{9}$$

auf. Dies wäre die Eigenkreisfrequenz für den Drehschwinger allein als Schwerependel in vertikaler Lage ohne Federrückstellung und ohne Dämpfung. Das Erregerglied mit der Erschütterungsbeschleunigung $\ddot{q}$ erhält mit der Amplitude q_0 aus (7) und der reduzierten Pendellänge l die relative Erregeramplitude

$$\varepsilon = \frac{q_0}{l}\,. \tag{10}$$

Diese relative Amplitude ist für die vorliegende Problemstellung stets sehr klein, so daß mit $\varepsilon \ll 1$ ein kleiner Parameter in der nichtlinearen Schwingungsgleichung vorkommt. Zur Kennzeichnung des Dämpfungsmomentes wird das dimensionslose *Lehr*sche Dämpfungsmaß verwendet:

$$2\,D = \frac{b}{J\,\omega_F}\,. \tag{11}$$

Da man bei Schwingungsmeßgeräten die für eine treue Anzeige günstigste Dämpfung $D \approx 1/2$ anstrebt, hat (11) einen Wert von der Größenordnung eins. Da Auswanderungserscheinungen erst bei Erschütterungsfrequenzen ω auftreten, die wesentlich über den Eigenfrequenzen ω_F und ω_0 liegen, sind die mit (8) und (9) gebildeten Frequenzverhältnisse

$$\alpha_F = \frac{\omega_F}{\omega}\,, \qquad \alpha_0 = \frac{\omega_0}{\omega} \tag{12}$$

besonders wichtige Größen, die ebenfalls klein gegen eins sind. Mit den Abkürzungen (7) bis (12) und mit einer dimensionslosen Zeitzählung

$$\tau = \omega\,t \tag{13}$$

ergibt sich aus (6) die grundlegende nichtlineare Schwingungsgleichung

$$\varphi'' + 2\,D\,\alpha_F\,\varphi' + \alpha_F^2(\varphi - \varphi_F) + \alpha_0^2\cos\varphi + \varepsilon\,\Pi''(\tau)\sin(\delta - \varphi) = 0\,, \tag{14}$$

in welcher Akzente nun Differentiation nach der dimensionslosen Zeit τ bezeichnen. Hieraus geht die aus der Theorie der Schwingungsmeßgeräte geläufige lineare Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen hervor, wenn man sich auf kleine Schwingungen um die horizontale Gleichgewichtslage und auf rein harmonische Erschütterung in der Vertikalen beschränkt. Dann ist $\varepsilon\,\Pi''\sin(\pi/2 - \varphi) = -\varepsilon\cos\tau\cos\varphi \approx -\varepsilon\cos\tau$, und für die horizontale statische Ruhelage $\varphi = 0$ folgt aus (14) $-\alpha_F^2\,\varphi_F + \alpha_0^2 = 0$, was genau der Bedingung (4) entspricht. Also bleibt dann mit der dimensionslosen Zeitzählung (13) nur die bekannte lineare Schwingungsgleichung

$$\varphi'' + 2\,D\,\alpha_F\,\varphi' + \alpha_F^2\,\varphi = \varepsilon\cos\tau$$

bestehen, woraus jedoch der beobachtete mehrdeutige Schwingungszustand nicht mehr berechnet werden kann. Man ist daher zum Rückgriff auf die nichtlineare Gleichung (14) gezwungen.

Die Durchrechnung des Problems mit der Gleichung (14) allein setzt voraus, daß die Beschränkung auf nur einen Freiheitsgrad durch Vernachlässigung der Trägheitswirkungen der Rückstellfeder näherungsweise zulässig ist. Diese Vernachlässigung etwaiger Resonanzeigenschaften der Feder ist durchaus problematisch, und *K. Klotter*[1] hat durch ein Beispiel eines elastischen Schwingers mit erschütterter Drehachse auf diese Trägheitswirkungen hingewiesen. Doch soll in der vorliegenden Arbeit von den Trägheitswirkungen abgesehen werden, wie dies in der Schwingungslehre meist üblich ist. Dies hat insofern eine gewisse Berechtigung, als in einer etwas andersartigen Untersuchung[2] eines Gerätes mit Schraubenfedern die Schwingungseigenschaften der Feder durch Erweiterung der Rechnung auf zwei Freiheitsgrade berücksichtigt wurden und dabei für die Instabilitätsgrenze bei höherer Erschütterungsfrequenz genau die gleichen Werte berechnet werden, wie sie sich aus der Gleichung (14) ergeben werden. Daher erscheint die vorliegende Formulierung durchaus geeignet, wesentliche Eigenschaften der Auswanderungserscheinung zu untersuchen.

3. Die erzwungenen Schwingungen. Zur Berechnung der durch die Gleichung (14) beschriebenen erzwungenen Schwingungen mit hoher Erregerfrequenz eignet sich besonders ein direkter *Fourier*-Ansatz in der von *K. L. Stellmacher*[3] angegebenen Weise, bei welcher sich die Koeffizienten aus den nichtlinearen Gleichungen rekursibel berechnen lassen. Da die vorliegende Gleichung (14) besonders durch die Einbeziehung der Dämpfung komplizierter gebaut ist als die bereits behandelten Beispiele vom Typ ungedämpfter Pendelschwingungen, wird auf Konvergenzuntersuchungen ganz verzichtet und daher auch in formal etwas einfacherer Weise vorgegangen. Zur Berechnung der erzwungenen Schwingungen aus Gleichung (14) wird für den Schwingungsausschlag $\varphi(\tau)$ eine *Fourier*-Reihe in der Form

$$\varphi(\tau) = \varphi_0 + \Phi(\tau) \quad \text{mit} \quad \varphi_0 = \text{konst.} \quad \text{und} \quad \Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n \tau} \tag{15}$$

angesetzt. In (15) bezeichnet φ_0 den Hauptbestandteil des zeitunabhängigen Gliedes der komplex angesetzten *Fourier*-Reihe. Der in $\Phi(\tau)$ nochmals vorkommende nullte *Fourier*-Koeffizient c_0 soll nach einem Vorschlag von *K. L. Stellmacher* nur als Korrektur zu φ_0 berechnet werden. Dem Koeffizienten φ_0 kommt besondere Bedeutung zu, da er bis auf kleine Korrekturen die Mittellage der eintretenden Schwingung beschreibt. Ist nämlich der Winkel φ_0 von dem Winkelausschlag der statischen Gleichgewichtslage verschieden, so ist der Schwinger „ausgewandert". Da man diese Mittellage bei jedem Experiment in erster Linie beobachtet, wird φ_0 zur Kennzeichnung der eintretenden Schwingung verwendet.

Zur Durchführung der Rechnung soll zunächst der wichtige Fall der rein harmonischen Erschütterung und dann ein spezieller Fall einer allgemeineren Erschütterungsfunktion behandelt werden.

a) Harmonische Erschütterung. In (14) ist nun $\Pi'' = -\cos\tau$ einzusetzen, so daß zunächst für Schwingungen um die noch unbekannte Mittellage φ_0 die durch Entwicklung nach Φ entstehende nichtlineare Schwingungsgleichung gilt

$$\Phi'' + 2\,D\,\varkappa_F\,\Phi' + \varkappa_F^2(\Phi + \varphi_0 - \varphi_F) + \varkappa_0^2\left[\cos\varphi_0 - \sin\varphi_0\frac{\Phi}{1!} - \cos\varphi_0\frac{\Phi^2}{2!} + \sin\varphi_0\frac{\Phi^3}{3!}\cdots\right]$$
$$+ \varepsilon\cos\tau\left[\sin(\varphi_0-\delta) + \cos(\varphi_0-\delta)\frac{\Phi}{1!} - \sin(\varphi_0-\delta)\frac{\Phi^2}{2!} - \cos(\varphi_0-\delta)\frac{\Phi^3}{3!}\cdots\right] = 0. \tag{14,1}$$

Trägt man hier den *Fourier*ansatz für $\Phi(t)$ ein und vergleicht die Faktoren von $e^{i n \tau}$ für festes $N \neq 0$, so findet man die Koeffizientengleichungen

$$-N^2 c_N + i\,2\,D\,\varkappa_F\,N\,c_N + \varkappa_F^2\,c_N + \varkappa_0^2\Big[-\sin\varphi_0\,c_N - \cos\varphi_0\frac{1}{2}\sum_m c_{N-m}c_m$$
$$+ \sin\varphi_0\frac{1}{6}\sum_m\sum_n c_{N-m-n}c_m c_n\cdots\Big] + \frac{\varepsilon}{2}\Big[\sin(\varphi_0-\delta)(e_{1,N}+e_{-1,N})$$
$$+ \cos(\varphi_0-\delta)(c_{N-1}+c_{N+1}) - \sin(\varphi_0-\delta)\frac{1}{2}\sum_m(c_{N-m-1}+c_{N-m+1})c_m$$
$$- \cos(\varphi_0-\delta)\frac{1}{6}\sum_m\sum_n(c_{N-m-n-1}+c_{N-m-n+1})c_m c_n + \cdots\Big] = 0$$
$$(N = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{15, N}$$

[1] Vgl. S. 356 des in Fußnote 2 auf S. 43 genannten Buches.

[2] *F. Weidenhammer*, Z. angew. Math. Mech., 37 (1957) S. 286.

[3] *K. L. Stellmacher*, Z. angew. Math. Mech. 34 (1954) S. 105. (Die Lektüre dieser Arbeit ist durch zahlreiche Druckfehler sehr erschwert.)

in denen die Summationen über alle positiven und negativen ganzzahligen Werte der Indizes zu erstrecken sind und $e_{n\,N}$ das *Kroneckers*ymbol bezeichnet:

$$e_{n\,N} = 1 \quad \text{für} \quad n = N\,, \qquad e_{n\,N} = 0 \quad \text{für} \quad n \neq N\,.$$

Für den nullten *Fourier*koeffizienten $\varphi_0 + c_0$ findet man aus (15, N) für $N = 0$ die besonders wichtige Gleichung

$$\begin{aligned} \varkappa_F^2(\varphi_0 + c_0 - \varphi_F) + \varkappa_0^2 \Big[&\cos\varphi_0 - \sin\varphi_0\, c_0 - \cos\varphi_0 \frac{1}{2} \sum_m c_{-m}\, c_m + \sin\varphi_0 \frac{1}{6} \sum_m \sum_n c_{-m-n}\, c_m\, c_n + \cdots \Big] \\ + \frac{\varepsilon}{2} \Big[&\cos(\varphi_0 - \delta)\,(c_{-1} + c_1) - \sin(\varphi_0 - \delta) \frac{1}{2} \sum_m (c_{-m-1} + c_{-m+1})\, c_m \\ - &\cos(\varphi_0 - \delta) \frac{1}{6} \sum_m \sum_n (c_{-m-n-1} + c_{-m-n+1})\, c_m\, c_n + \cdots \Big] = 0\,, \end{aligned} \tag{15, 0}$$

aus der sich die Mittellage durch φ_0 und c_0 berechnen läßt.

Um das nichtlineare Gleichungssystem für die *Fourier*koeffizienten φ_0 und c_N ($N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) rekursibel auflösen zu können, werden die Koeffizienten nach dem kleinen Parameter ε von (10) entwickelt. Zu dem Zweck sind Voraussetzungen über die Größenordnungen der übrigen Gleichungsparameter von (14) unumgänglich. Es gilt also eine Beziehung über die Größenordnungen der Frequenzverhältnisse $\varkappa_F$ und $\varkappa_0$ zu ε festzulegen. Hierfür greift man zweckmäßig auf die Untersuchungen des erschütterten Pendels im Schwerefeld zurück. Bei diesen hat sich stets ergeben[1], daß Auswanderungen aus der statischen Ruhelage dann eintreten, wenn die Erschütterungsamplitude q_0 und die zugehörige Frequenz ω so groß sind, daß der Intensitätsparameter

$$\zeta = \frac{q_0^2}{l^2} \frac{\omega^2}{\frac{g}{l}} = \frac{\varepsilon^2}{\varkappa_0^2}$$

von der Größenordnung eins ist. Also muß das Frequenzverhältnis $\varkappa_0$ von der Größenordnung ε sein. Diese Voraussetzung über die Größenordnung wird sich auch für das vorliegende, abgeänderte Problem als richtig erweisen. Da im allgemeinen bei Meßgeräten ω_0 und ω_F die gleiche Größenordnung haben, sind auch die Frequenzverhältnisse von der gleichen Größenordnung ε, was durch die Schreibweise

$$\varkappa_0 = \bar{\varkappa}_0\, \varepsilon\,, \qquad \varkappa_F = \bar{\varkappa}_F\, \varepsilon \tag{16}$$

zum Ausdruck gebracht werden soll. Für den Dämpfungsbeiwert gilt dann entsprechend

$$2\,D\,\varkappa_F = 2\,D\,\bar{\varkappa}_F\,\varepsilon \sim \varepsilon\,. \tag{17}$$

da $2\,D$ für die in Meßgeräten angestrebte günstigste Dämpfung die Größenordnung eins hat.

Die *Fourier*koeffizienten c_n sollen nun ebenfalls nach Potenzen von ε entwickelt werden:

$$c_n = c_n^{(0)} + c_n^{(1)}\,\varepsilon + c_n^{(2)}\,\varepsilon^2 + \cdots \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\,. \tag{18}$$

Dabei soll in den Entwicklungen (18) für $n = 0$ das von ε unabhängige Glied $c_0^{(0)}$ fehlen, da hierfür seiner besonderen Bedeutung wegen das Mittellagenglied φ_0 mit der Größenordnung eins schon in den Ansatz (15) eingetragen wurde. Dann bietet (18) die Möglichkeit, c_0 als Korrektur zur Mittellage φ_0 durch

$$c_0 = c_0^{(1)}\,\varepsilon + c_0^{(2)}\,\varepsilon^2 + \cdots$$

zu berechnen.

Geht man mit den Entwicklungen (18) in die Koeffizientengleichungen (15) ein, so kann man diese Gleichungen mit den Ansätzen (16) und (17) rekursibel lösen. Zunächst erhält man aus den Gleichungen (15, N) für die Potenzen ε^0

$$-N^2\, c_N^{(0)} = 0 \quad \text{mit den Lösungen} \quad c_N^{(0)} = 0\,, \qquad N = \pm 1, \pm 2, \ldots\,. \tag{19}$$

Der Vergleich der Vorfaktoren der Potenzen ε^1 liefert mit (19) die Gleichungen

$$-N^2\, c_N^{(1)} + \frac{1}{2} \sin(\varphi_0 - \delta)\,(e_{1,\,N} + e_{-1,\,N}) = 0\,,$$

so daß sich die Lösungen

$$c_1^{(1)} = c_{-1}^{(1)} = \frac{1}{2} \sin(\varphi_0 - \delta)\,, \qquad c_N^{(1)} = 0 \quad (N = \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{20}$$

[1] Vgl. S. 379 des in Fußnote 2 auf Seite 43 genannten Buches von *K. Klotter*. Der dort verwendete Erschütterungsparameter ist bis auf den Faktor 2 gleich dem Kehrwert des hier verwendeten Intensitätsparameters.

ergeben. Durch Koeffizientenvergleich findet man für die Potenzen ε^2 mit $c_N^{(0)} = 0$ die Gleichungen

$$-N^2 c_N^{(2)} + i\,2\,D\,\bar{\alpha}_F\,N\,c_N^{(1)} + \frac{1}{2}\cos(\varphi_0 - \delta)\,(c_{N-1}^{(1)} + c_{N+1}^{(1)}) = 0 \quad (N = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

deren Lösungen sich mit (20) wiederum unmittelbar angeben lassen:

$$\left.\begin{aligned} c_1^{(2)} &= i\,D\,\bar{\alpha}_F \sin(\varphi_0 - \delta) + \frac{1}{2}\cos(\varphi_0 - \delta)\,c_0^{(1)}, \\ c_{-1}^{(2)} &= -i\,D\,\bar{\alpha}_F \sin(\varphi_0 - \delta) + \frac{1}{2}\cos(\varphi_0 - \delta)\,c_0^{(1)}, \\ c_{-2}^{(2)} &= c_2^{(2)} = \frac{1}{32}\sin 2(\varphi_0 - \delta); \\ c_N^{(2)} &= 0 \qquad \text{für} \quad N = \pm 3, \pm 4, \ldots . \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Grundsätzlich kann man die Berechnung der *Fourier*koeffizienten $c_N\,(N \neq 0)$ auf diesem Wege bis zu beliebigen Potenzen von ε weiter fortsetzen. Doch genügt es für die vorliegende Aufgabenstellung, die Rechnung hier abzubrechen.

Die noch verbleibende Gleichung (15, 0) für den nullten *Fourier*koeffizienten liefert auf dem gleichen Wege der Entwicklung für die Potenzen ε^0 und ε^1 nur leere Aussagen. Für ε^2 hingegen findet man die besonders wichtige Beziehung

$$\bar{\alpha}_F^2(\varphi_0 - \varphi_F) + \bar{\alpha}_0^2 \cos\varphi_0 + \frac{1}{2}\cos(\varphi_0 - \delta)\,(c_{-1}^{(1)} + c_1^{(1)}) = 0,$$

wobei beachtet wurde, daß für den Sollwert φ_F nach (4) auch

$$\varphi_F = \frac{M\,g\,s}{c} = \frac{\omega_0^2}{\omega_F^2} = \frac{\alpha_0^2}{\alpha_F^2}$$

geschrieben werden kann, so daß φ_F als von der Größenordnung eins erkannt werden kann. Kleine Abweichungen von diesem Sollwert werden sich als wesentlich erweisen, ändern aber diese Größenordnung nicht. Mit den Werten $c_{\pm 1}^{(1)}$ aus (20) folgt die wichtige Mittellagen-Gleichung

$$M(\varphi_0) = \bar{\alpha}_F^2(\varphi_0 - \varphi_F) + \bar{\alpha}_0^2 \cos\varphi_0 + \frac{1}{4}\sin 2(\varphi_0 - \delta) = 0. \tag{22}$$

Aus dieser transzendenten Gleichung läßt sich φ_0 und damit die Mittellage der eintretenden erzwungenen Schwingung bis auf kleine Korrekturen $c_0^{(i)}$ berechnen.

Die Gleichung (22) soll daher noch in eine für die Zahlenrechnung geeignete Form gebracht werden. Zu dem Zweck wird der Federaufzugswinkel φ_F mit seinem Sollwert (4) und einem Fehler Δ in der Form

$$\varphi_F = \frac{\alpha_0^2}{\alpha_F^2} + \Delta \tag{23}$$

in (22) eingesetzt und der abgespaltene Faktor ε^2 wieder zugefügt, so daß nach Division durch α_0^2

$$\frac{\alpha_F^2}{\alpha_0^2}(\varphi_0 - \Delta) + \cos\varphi_0 - 1 + \frac{1}{4}\zeta \sin 2(\varphi_0 - \delta) = 0 \tag{22, 1}$$

entsteht. Durch

$$\zeta = \frac{\varepsilon^2}{\alpha_0^2} = \frac{q_0^2\,\omega^2}{l^2\,\omega_0^2} = \frac{q_0^2\,\omega^2}{g\,l} \tag{24}$$

ist hier der schon erwähnte Intensitätsparameter zur Kennzeichnung der Erschütterung eingeführt worden, der sich als das geeignete Maß zur Beurteilung der Auswanderungen erweisen wird. Der Parameter ζ entspricht dem von *K. Klotter*[1] bei der Untersuchung des Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt verwendeten Erschütterungsparameter, der sich also auch bei dem vorliegenden andersartigen Problem als wesentlich erweist. Die übrigen Gleichungsparameter $\alpha_F^2/\alpha_0^2 = \omega_F^2/\omega_0^2$ und Δ sind Gerätekonstanten, während der Winkel δ die Lage der Erschütterungsrichtung gegen die Horizontale angibt. Im allgemeinen hat man für jedes Gerät mit seinen festen Daten für jeden Wert ζ einen oder mehrere Werte von φ_0 durch Auflösung der transzendenten Gleichung (22,1) zu berechnen. Lediglich für den Sonderfall eines nullfehlerfreien Gerätes ($\Delta = 0$) und für den in der Praxis häufigsten Fall der lotrechten Erschütterung ($\delta = 90°$) kann eine wichtige Lösung von

[1] Vgl. S. 379 des in Fußnote 2 auf Seite 43 genannten Buches.

(22,1) sofort angegeben werden. Aus

$$\frac{\alpha_F^3}{\alpha_0^3}\varphi_0 + \cos\varphi_0 - 1 - \frac{\zeta}{4}\sin 2\varphi_0 = 0 \tag{22,0}$$

folgt nämlich in diesem Falle sofort die Lösung $\varphi_0 = 0$, welche allerdings nur besagt, daß das Gerät in der gewünschten Weise Schwingungen um die statische Ruhelage $\varphi_0 = 0$ ausführen kann.

Die weitere Auswertung von (15,0) bezüglich der Potenzen ε^3 führt auf

$$\bar{\alpha}_F^3 c_0^{(1)} - \bar{\alpha}_0^2 \sin\varphi_0\, c_0^{(1)} + \frac{1}{2}\cos(\varphi_0 - \delta)\,(c_{-1}^{(2)} + c_1^{(2)}) - \frac{1}{4}\sin(\varphi_0 - \delta)\sum_m (c_{-m-1}^{(1)} + c_{-m+1}^{(1)})\, c_m^{(1)} = 0\,,$$

woraus sich mit den Werten $c_N^{(1)}$, $c_N^{(2)}$ aus (20), (21) die erste Korrektur $c_0^{(1)}$ zur Mittellage φ_0 bestimmen läßt. Man findet zunächst

$$\bar{\alpha}_F^3 c_0^{(1)} - \bar{\alpha}_0^2 \sin\varphi_0\, c_0^{(1)} + \frac{1}{2}\sin(\varphi_0 - \delta)\cos(\varphi_0 - \delta)\, c_0^{(1)} - \frac{1}{2}\sin(\varphi_0 - \delta)\sin(\varphi_0 - \delta)\, c_0^{(1)} = 0$$

und daraus endlich

$$c_0^{(1)}\left[\bar{\alpha}_F^3 - \bar{\alpha}_0^2 \sin\varphi_0 + \frac{1}{2}\cos 2(\varphi_0 - \delta)\right] = c_0^{(1)}\, M'(\varphi_0) = 0\,. \tag{25}$$

Wenn also φ_0 als Lösung von $M(\varphi_0) = 0$ nach (22) bestimmt wird und nicht auch die erste Ableitung $M'(\varphi_0)$ für diese Wurzelwerte verschwindet, dann ist $c_0^{(1)} = 0$ und eine Korrektur zu φ_0 ist mindestens von der Größenordnung ε^2. Allerdings ist ihre Berechnung langwierig und die Rechnung soll daher nur so weit getrieben werden, daß man ersehen kann, daß der Wert $c_0^{(2)}$ nicht verschwinden muß. Aus (15,0) folgt für die Potenzen ε^4

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_F^2 c_0^{(2)} - \bar{\alpha}_0^2 \sin\varphi_0\, c_0^{(2)} - \bar{\alpha}_0^2 \cos\varphi_0 \frac{1}{2}\sum_m c_{-m}^{(1)} c_m^{(1)} + \frac{1}{2}\cos(\varphi_0 - \delta)\,(c_{-1}^{(3)} + c_1^{(3)}) \\ - \frac{1}{4}\sin(\varphi_0 - \delta)\sum_m [(c_{-m-1}^{(2)} + c_{-m+1}^{(2)})\, c_m^{(1)} + (c_{-m-1}^{(1)} + c_{-m+1}^{(1)})\, c_m^{(2)}] \\ + \frac{1}{12}\cos(\varphi_0 - \delta)\sum_m \sum_n (c_{-m-n-1}^{(1)} + c_{-m-n+1}^{(1)})\, c_m^{(1)}\, c_n^{(1)} = 0\,,\end{aligned}$$

worin wiederum $c_N^{(0)} = 0$ für alle N unmittelbar berücksichtigt wurde. Mit den Werten (20) und (21) gewinnt man daraus nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned}c_0^{(2)}\left[\bar{\alpha}_F^3 - \bar{\alpha}_0^2 \sin\varphi_0 - \frac{1}{2}\sin^2(\varphi_0 - \delta)\right] - \frac{\bar{\alpha}_0^2}{4}\cos\varphi_0 \sin^2(\varphi_0 - \delta) + \frac{1}{2}\cos(\varphi - \delta)\,(c_{-1}^{(3)} + c_1^{(3)}) \\ - \frac{1}{64}\sin^2(\varphi_0 - \delta)\sin 2(\varphi_0 - \delta) = 0\,,\end{aligned}$$

was nur mit Kenntnis der $c_1^{(3)}$ und $c_{-1}^{(3)}$ allgemein ausgewertet werden kann. Da diese Koeffizientenanteile jedoch nur durch längere Rechnung aus (15, N) für ε^3 gewonnen werden können, soll $c_0^{(2)}$ nicht allgemein, sondern nur für den Spezialfall eines nullfehlerfreien Gerätes mit lotrechter Erschütterung und auch nur für $\varphi_0 = 0$ angegeben werden. Dann kann man die Korrektur $c_0^{(2)}$ ohne Kenntnis von $c_1^{(3)}$ und $c_{-1}^{(3)}$ berechnen, da der Vorfaktor dieser Koeffizienten $\cos(\varphi_0 - \delta) = \cos\pi/2$ verschwindet. Man findet dann $c_0^{(2)} \neq 0$ aus

$$c_0^{(2)}\left(\bar{\alpha}_F^3 - \frac{1}{2}\right) - \frac{\bar{\alpha}_0^2}{4} = 0\,,$$

sofern nur der schon in (25) aufgetretene Faktor $M'(\varphi_0 = 0) = \bar{\alpha}_F^3 - 1/2 \neq 0$ ist. Die Bedeutung dieser Ungleichung als Stabilitätsaussage wird sich später zu erkennen geben.

Die Auswertung der *Fourier*koeffizientengleichungen (15,N) und (15,0) kann auf dem angegebenen Wege bis zu beliebiger Genauigkeit vorgetrieben werden, wobei allerdings die Konvergenzfrage offen bleibt[1]. Beschränkt man sich auf quadratische Potenzen von ε, so sind die erzwungenen Schwingungen durch die zur *Fourier*reihe (15) gehörige reelle Darstellung

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) = \varphi_0 + c_0^{(2)}\varepsilon^2 + \varepsilon\sin(\varphi_0 - \delta)\cos\tau - \varepsilon\, 2\, D\,\alpha_F \sin(\varphi_0 - \delta)\sin\tau \\ + \frac{\varepsilon^2}{16}\sin 2(\varphi_0 - \delta)\cos 2\tau + 0(\varepsilon^3)\,.\end{aligned} \tag{26}$$

[1] Für Konvergenzuntersuchungen vgl. man die in Fußnote 3 auf Seite 46 genannte Arbeit von *K. L. Stellmacher*.

gegeben. Daß $\varphi(\tau)$ die Ausgangsgleichung in der angegebenen Näherung tatsächlich erfüllt, kann durch Einsetzen von (26) in (14,1) leicht erprobt werden. Da sich die Mittellage φ_0 (und abhängig davon auch $c_0^{(2)}$) mehrdeutig aus (22,1) berechnet, gibt es mehrere, voneinander verschiedene Schwingungsmöglichkeiten. Welcher Schwingungszustand tatsächlich eintritt, kann daher nur eine Stabilitätsuntersuchung entscheiden.

b) Periodische Erschütterung durch Schubkurbelantrieb. Um den Einfluß höherer Harmonischer kleiner Amplitude in der Erschütterungsfunktion kennen zu lernen, soll eine Zwangsführung durch einen Schubkurbelantrieb betrachtet werden (Abb. 3). Diese spezielle Anordnung wurde bereits von *K. L. Stellmacher*[1] beim Schwerependel betrachtet und verdient besonderes Interesse im Hinblick auf die meist übliche Prüfung der Geräte auf einem zwangläufig angetriebenen Rütteltisch. Aus der Kinematik des Kurbeltriebes ist die an Stelle von (7) tretende Erschütterungsfunktion und die zugehörige Beschleunigung bekannt[2]. Mit dem Stangenverhältnis $\lambda = r/L$ ergibt sich in diesem Falle die Beschleunigungsfunktion zu

$$q'' = -r\,\Pi''(\tau) = -r\left(\cos\tau + \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{4}\right)\cos 2\tau - \frac{\lambda^3}{4}\cos 4\tau \ldots\right), \tag{27}$$

worin wiederum die dimensionslose Zeitzählung (13) verwendet wird und außerdem höhere als vierte Potenzen von $\lambda < 1$ unberücksichtigt bleiben sollen. An die Stelle der Amplitude q_0 ist hier der Kurbelhalbmesser r getreten, so daß mit der reduzierten Pendellänge l für die relative Erregeramplitude (10) nun

$$\varepsilon = \frac{r}{l}$$

eintritt. Nimmt man an, daß die reduzierte Pendellänge l des Gerätes und die Pleuelstangenlänge L von gleicher Größenordnung sind, so ist der Quotient

$$a = \frac{l}{L}$$

von der Größenordnung eins, so daß sich λ als von der Größenordnung ε ergibt:

$$\lambda = \frac{r}{L} = a\,\varepsilon\,.$$

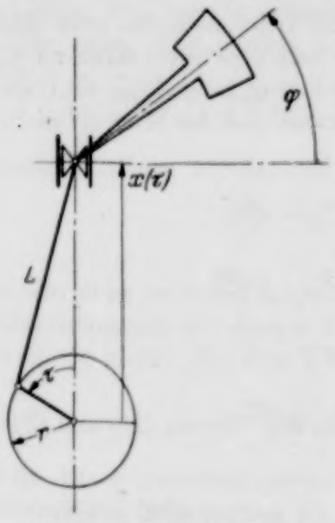


Abb. 3. Periodische Erschütterung durch Schubkurbelantrieb.

Damit können die Koeffizienten der Beschleunigungsfunktion (27) durch den kleinen Parameter ε ausgedrückt werden. Trägt man sodann (27) in (14) ein, so erhält man in diesem Falle einer allgemeineren Erschütterungsfunktion die Bewegungsgleichung

$$\varphi'' + 2\,D\,\alpha_F\,\varphi' + \alpha_F^2\,(\varphi - \varphi_F) + \alpha_0^2\cos\varphi + \left(\varepsilon\cos\tau + \varepsilon^2\,a\cos 2\tau + \frac{\varepsilon^4}{4}\,a^3\,(\cos 2\tau - \cos 4\tau)\ldots\right)\sin(\varphi - \delta) = 0\,.$$

Unter den gleichen Voraussetzungen und auf die gleiche Weise wie im vorstehenden Abschn. 3a) lassen sich auch in diesem Falle die erzwungenen Schwingungen berechnen. Einzelheiten der Rechnung bieten kein Interesse, so daß nur das Ergebnis mitgeteilt werden soll. An Stelle von (26) ergibt sich bis auf einen Zusatzterm in der zweiten Harmonischen die gleiche *Fourier*entwicklung:

$$\varphi = \varphi_0 + c_0^{(2)}\,\varepsilon^2 + \varepsilon\sin(\varphi_0 - \delta)\cos\tau - \varepsilon\,2\,D\,\alpha_F\sin(\varphi_0 - \delta)\sin\tau + \left(\frac{\varepsilon^2\,a}{4}\sin(\varphi_0 - \delta) + \frac{\varepsilon^2}{16}\sin 2\,(\varphi_0 - \delta)\right)\cos 2\tau + 0(\varepsilon^3)\,. \tag{26,1}$$

Hierin bestimmt sich bemerkenswerterweise die Mittellage φ_0 aus der unveränderten Gleichung (22,1), so daß auch bei der Diskussion dieser Mittellagengleichung keine neuen Erkenntnisse gewonnen werden. Die Korrektur $c_0^{(1)}$ zu φ_0 verschwindet unter den gleichen Voraussetzungen wie in (25). Auf die Berechnung von $c_0^{(2)}$ wird verzichtet, da trotz längerer Rechnung keine neuen Erkenntnisse zu erwarten sind.

[1] Vgl. S. 118 der in Fußnote 3 auf Seite 46 genannten Arbeit.

[2] Vgl. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 2, S. 227, 2. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1953.

4. Das Stabilitätsproblem. Da die gefundenen Schwingungen (26) erzwungene Schwingungen um jeweils verschiedene Mittellagen sind, gibt es für ein Gerät bei gleicher Erschütterungsfrequenz und gleicher Amplitude mehrere Schwingungsmöglichkeiten. Um die wichtige Frage zu entscheiden, welche der möglichen Schwingungen tatsächlich eintreten, hat man ihre Stabilität zu untersuchen. Aus Gründen der rechnerisch einfachen Durchführbarkeit wird die infinitesimale Stabilität im Sinne der Methode der kleinen Schwingungen zur Entscheidung der Stabilitätsfragen herangezogen. Die Stabilität der berechneten Schwingungen aus (26) und (26,1) wird also aus linearen Differentialgleichungen für eine kleine Störung $u(\tau)$ der abgeänderten Schwingung $\bar{\varphi} = \varphi + u$ berechnet. Falls eine kleine, jedoch sonst allgemeine Störung $u(\tau)$ sich als mit der Zeit exponentiell abklingend ergibt, ist die auf Stabilität zu prüfende Schwingung φ stabil in dem Sinne, daß bei kleiner Abänderung der Anfangsbedingungen die erzwungene Schwingung φ mit überlagerten kleinen Störungen endlicher Amplitude bestehen bleibt und also nicht etwa eine andere der berechneten möglichen erzwungenen Schwingungen φ eintritt[1].

Die Störungsbewegung u genügt einer Differentialgleichung, die sich aus der Bewegungsgleichung für φ durch Einführung von $\bar{\varphi} = \varphi + u$ mit anschließender Linearisierung in bezug auf u ergibt. Aus (14) erhält man so die homogene lineare Differentialgleichung

$$u'' + 2\,D\,\alpha_F\,u' + [\alpha_F^2 - \alpha_0^2 \sin\varphi - \varepsilon\,\Pi''(\tau)\cos(\varphi - \delta)]\,u = 0\,, \tag{28}$$

in welcher die zu untersuchende Schwingung $\varphi(\tau)$ mit ihrer bekannten *Fourier*entwicklung einzutragen ist und sich alle nichthomogenen Gleichungsterme herausgehoben haben, da $\varphi(\tau)$ Lösung von (14) ist. Um die Stabilitätsgleichung (28) in die auswertbare Form einer Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten überzuführen, wird gemäß (15) $\varphi(\tau)$ nach Potenzen von $\Phi(\tau)$ um die Mittellage φ_0 entwickelt, was auf

$$u'' + 2\,D\,\alpha_F\,u' + \left[\alpha_F^2 - \alpha_0^2 \sin\varphi_0 - \alpha_0^2 \cos\varphi_0 \frac{\Phi}{1!} + \alpha_0^2 \sin\varphi_0 \frac{\Phi^2}{2!} + \cdots \right.$$

$$\left. - \varepsilon\,\Pi''(\tau)\left(\cos(\varphi_0 - \delta) - \sin(\varphi_0 - \delta)\frac{\Phi}{1!} - \cos(\varphi_0 - \delta)\frac{\Phi^2}{2!} + \cdots\right)\right] u = 0 \tag{28,1}$$

führt. Hier hinein ist nun $\Pi''(\tau)$ und $\varphi(\tau)$ einzusetzen, was zunächst für den Fall rein harmonischer Erschütterung geschehen soll.

a) Harmonische Erschütterung. In diesem Fall sind $\Pi'' = -\cos\tau$ und $\varphi(\tau)$ mit ihren *Fourier*entwicklungen (26) als bekannte Zeitfunktionen in (28,1) einzusetzen. Wird für φ die Näherung (26) mit einem Fehler der Größenordnung ε^3 verwendet, so wird die Gleichung für u eine Näherungsdifferentialgleichung mit einem Fehler der Größenordnung ε^4. Sie ist eine *Hill*sche Differentialgleichung

$$u'' + 2\,D\,\alpha_F\,u' + \Psi(\tau)\,u = 0 \tag{28,2}$$

mit der periodischen Koeffizienten-Funktion $\Psi(\tau)$. Zur Vereinfachung dieser linearen Differentialgleichung kann man die neue abhängige Veränderliche $w(\tau)$ durch die Transformation

$$u(\tau) = e^{-D\,\alpha_F\,\tau}\,w(\tau) \tag{29}$$

einführen, so daß sich für $w(\tau)$ die einfachere Differentialgleichung

$$w'' + (\Psi(\tau) - D^2\,\alpha_F^2)\,w = 0 \tag{30}$$

ergibt. Die in (30) neu aufgetretene Koeffizientenfunktion soll in der für die weitere Rechnung zweckmäßigen komplexen Form

$$\Psi(\tau) - D^2\,\alpha_F^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n\,e^{i\,n\,\tau} \tag{31}$$

geschrieben werden und ihre Koeffizienten d_n werden wiederum nach Potenzen von ε geordnet. Vernachlässigt man vierte und höhere Potenzen von ε, so bricht die *Fourier*reihe (31) nach der dritten Harmonischen ab und man erhält nach einiger Rechnung die Koeffizienten mit den

[1] Vgl. z. B. *A. Liapounoff*, Ann. Faculté des Sciences de Toulouse, II, 9 (1907) S. 203—469, Neudruck Princeton 1949.

Werten

$$d_0 = d_0^{(2)}\varepsilon^2 = \left[\bar{\alpha}_F^2(1-D^2) - \bar{\alpha}_0^2 \sin\varphi_0 - \frac{1}{2}\sin^2(\varphi_0-\delta)\right]\varepsilon^2 ,$$

$$d_1 = d_{-1} = d_1^{(1)}\varepsilon + d_1^{(3)}\varepsilon^3 = \left[\frac{1}{2}\cos(\varphi_0-\delta)\right]\varepsilon + \left[-\frac{\bar{x}_0^2}{2}\cos\varphi_0\sin(\varphi_0-\delta) - \frac{c_0^{(2)}}{2}\sin(\varphi_0-\delta) - \frac{1}{64}\sin 2(\varphi_0-\delta)\sin(\varphi_0-\delta) - \frac{3}{16}\cos(\varphi_0-\delta)\sin^2(\varphi_0-\delta)\right]\varepsilon^3 ,$$

$$d_2 = d_2^{(2)}\varepsilon^2 + d_2^{(3)}\varepsilon^3 = \left[-\frac{1}{4}\sin^2(\varphi_0-\delta)\right]\varepsilon^2 + \left[-i\frac{D\,\bar{\alpha}_F}{2}\sin^2(\varphi_0-\delta)\right]\varepsilon^3 ,$$

$$d_{-2} = d_{-2}^{(2)}\varepsilon^2 + d_{-2}^{(3)}\varepsilon^3 = \left[-\frac{1}{4}\sin^2(\varphi_0-\delta)\right]\varepsilon^2 + \left[i\frac{D\,\bar{\alpha}_F}{2}\sin^2(\varphi_0-\delta)\right]\varepsilon^3 ,$$

$$d_3 = d_{-3} = d_3^{(3)}\varepsilon^3 = \left[-\frac{1}{64}\sin 2(\varphi_0-\delta)\sin(\varphi_0-\delta) - \frac{1}{16}\cos(\varphi_0-\delta)\sin^2(\varphi_0-\delta)\right]\varepsilon^3 ,$$

$$d_m = 0 \qquad \text{für } |m| > 3 .$$

Nach dem *Floquet*schen Theorem[1] setzt sich die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichungen (31) im vorliegenden allgemeinen Falle aus zwei linear unabhängigen Teillösungen der Form

$$C_1 e^{i\varrho\tau} V_1(\tau) , \qquad C_2 e^{-i\varrho\tau} V_2(\tau) \tag{32}$$

zusammen. In (32) bezeichnet ϱ den charakteristischen Exponenten, während $V_1(\tau)$ und $V_2(\tau)$ zu der Koeffizientenfunktion $\Psi - D^2\alpha_F^2$ gleichperiodische Funktionen sind. Mit zwei Integrationskonstanten C_1 und C_2 läßt sich aus den Teillösungen (32) eine allgemeine Lösung zunächst für w und damit auch für u zusammensetzen. Über das Wachstum dieser Störbewegung u entscheidet zufolge der Transformation (29) der charakteristische Exponent ϱ, so daß die Berechnung von ϱ die Hauptaufgabe der Stabilitätsuntersuchung ist. Zu dem Zweck genügt es, eine Teillösung in der Form

$$w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{i(\varrho+n)\tau} \tag{32,1}$$

mit den *Fourier*koeffizienten v_n zu betrachten. Da die Koeffizientenfunktion durch eine *Fourier*reihe mit nach Potenzen von ε geordneten Koeffizienten der Differentialgleichung (30) gegeben ist, liegt es nahe, auch die *Fourier*koeffizienten v_n der Teillösung (32,1) durch solche Entwicklungen schrittweise zu berechnen. Eine derartige rekursible Lösung wird sich als möglich erweisen, wenn man auch den charakteristischen Exponenten in gleicher Weise entwickelt.

Trägt man den Ansatz (32,1) in (30) ein, so wird man für die Koeffizienten v_N auf das homogene lineare Gleichungssystem

$$-(N^2 + 2\varrho N + \varrho^2)v_N + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{N-n} v_n = 0 \qquad (N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{33}$$

geführt, worin der gesuchte Exponent ϱ als Parameter enthalten ist. Trägt man die ε-Entwicklungen

$$v_n = v_n^{(0)} + v_n^{(1)}\varepsilon + v_n^{(2)}\varepsilon^2 + \cdots \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) ,$$
$$\varrho = \varrho^{(0)} + \varrho^{(1)}\varepsilon + \varrho^{(2)}\varepsilon^2 + \cdots$$

in die Gleichungen (33) ein und beachtet den Aufbau der Koeffizienten (31), so lassen sich diese Gleichungen rekursibel lösen. Zunächst findet man für $N = 0$ wegen $d_n^{(0)} = 0$ für alle n

$$-\varrho^{(0)2} v_0^{(0)} = 0 , \tag{33,00}$$

was durch $\varrho^{(0)} = 0$ und entsprechend dem homogenen Charakter der Gleichungen (33) mit beliebigem $v_0^{(0)}$ gelöst werden kann. Diese Lösung entspricht durchaus bekannten Ergebnissen über die *Mathieu*sche Differentialgleichung, mit welcher (30) für kleine Parameterwerte eng verwandt ist. Es wird $v_0^{(0)} = 1$ gewählt. Für $N \neq 0$ ergibt sich weiter aus (33) mit $\varrho^{(0)} = 0$

$$-N^2 v_N^{(0)} = 0 , \qquad v_N^{(0)} = 0 \qquad (N = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) . \tag{33, N, 0}$$

Weiter liefert für Potenzen ε^1 und $N = 0$ (33) zunächst nur eine leere Aussage. Dagegen folgt für $N \neq 0$ aus (33)

$$-N^2 v_N^{(1)} - 2\varrho^{(1)} v_N^{(0)} + \sum_n (d_{N-n}^{(0)} v_n^{(1)} + d_{N-n}^{(1)} v_n^{(0)}) = 0 . \tag{33, N, 1}$$

[1] Vgl. z. B. *J. Horn*, Gewöhnliche Differentialgleichungen S. 96, 5. Aufl. Berlin 1948.

Da $v_N^{(0)} = 0$ für $N \neq 0$, kommt das unbekannte $\varrho^{(1)}$ in (33, N, 1) nicht vor. Da es außerdem nach (31) keine Bestandteile $d_N^{(0)}$ und nur die Anteile $d_1^{(1)}$, $d_{-1}^{(1)}$ gibt, ist die Ausrechnung einfach und führt mit $v_0^{(0)} = 1$ auf

$$v_1^{(1)} = d_1^{(1)}, \quad v_{-1}^{(1)} = d_{-1}^{(1)}, \quad v_N^{(1)} = 0 \quad \text{für } N = \pm 2, \pm 3, \ldots .$$

Der Vergleich der Potenzen ε^2 in (33) für $N = 0$ führt auf

$$-\varrho^{(1)^2} v_0^{(0)} + \sum_n (d_{-n}^{(1)} v_n^{(1)} + d_{-n}^{(2)} v_n^{(0)}) = 0 ,$$

was mit den berechneten Werten von $v_n^{(1)}$ und $v_0^{(0)} = 1$ zur Bestimmung von $\varrho^{(1)}$ dient. Es ergibt sich die wichtige Beziehung

$$\varrho^{(1)^2} = d_{-1}^{(1)} v_1^{(1)} + d_1^{(1)} v_{-1}^{(1)} + d_0^{(2)} = d_0^{(2)} + 2\, d_1^{(1)} d_{-1}^{(1)} , \tag{34}$$

woraus sich später die Stabilitätsfragen entscheiden lassen.

Zunächst soll noch das in der Entwicklung von ϱ folgende Glied $\varrho^{(2)}$ berechnet werden. Zu dem Zweck muß vorbereitend zunächst (33) auch für $N \neq 0$ und ε^2 ausgewertet werden. Aus

$$-N^2 v_N^{(2)} - 2\, N \varrho^{(1)} v_N^{(1)} - \varrho^{(1)^2} v_N^{(0)} + \sum_n (d_{N-n}^{(1)} v_n^{(1)} + d_{N-n}^{(2)} v_n^{(0)}) = 0$$

erhält man für die sogleich benötigten Koeffizientenanteile $v_1^{(2)}$ und $v_{-1}^{(2)}$

$$v_1^{(2)} = -2\, \varrho^{(1)} v_1^{(1)} , \qquad v_{-1}^{(2)} = 2\, \varrho^{(1)} v_{-1}^{(1)} .$$

Damit kann $\varrho^{(2)}$ aus (33) für $N = 0$ durch Betrachtung der Potenzen ε^3 berechnet werden. Die Gleichung

$$-2\, \varrho^{(1)} \varrho^{(2)} v_0^{(0)} + \sum_n (d_{-n}^{(1)} v_n^{(2)} + d_{-n}^{(2)} v_n^{(1)} + d_{-n}^{(3)} v_n^{(0)}) = 0$$

reduziert sich bei Beachtung der Entwicklungen (31) und mit den Lösungen $v_n^{(1)}$ und $v_n^{(0)}$ auf

$$2\, \varrho^{(1)} \varrho^{(2)} = \sum_n d_{-n}^{(1)} v_n^{(2)} = d_1^{(1)} v_{-1}^{(2)} + d_{-1}^{(1)} v_1^{(2)} .$$

Hieraus folgt

$$2\, \varrho^{(1)} \varrho^{(2)} = 2\, \varrho^{(1)} (d_{-1}^{(1)} v_1^{(1)} - d_1^{(1)} v_{-1}^{(1)}) = 0 ,$$

weil $v_1^{(1)} = v_{-1}^{(1)}$ und $d_1^{(1)} = d_{-1}^{(1)}$ ist. Da $\varrho^{(1)} \neq 0$ berechnet wurde, ist also $\varrho^{(2)} = 0$. Mithin gilt für den charakteristischen Exponenten nach (34)

$$\varrho = \varrho^{(1)} \varepsilon + 0(\varepsilon^3) = \sqrt{d_0^{(2)} + 2\, d_{-1}^{(1)} d_1^{(1)}}\, \varepsilon + 0(\varepsilon^3) ,$$

was später ausführlich diskutiert werden wird.

Zunächst soll jedoch gezeigt werden, daß auch für den behandelten Fall der allgemeineren Erschütterung diese Beziehung gilt.

b) Periodische Erschütterung durch Schubkurbelantrieb. Auf Grund der Erschütterungsfunktion (27) stellt sich die Zwangsschwingung (26,1) ein, für die man wiederum die Stabilitätsgleichung (28,2), jedoch mit einer etwas anderen Koeffizientenfunktion Ψ' erhält. Beschränkt man sich auf quadratische Potenzen von ε, so ist lediglich bei d_2 gegenüber (31) die Änderung in

$$d_2 = d_2^{(2)} \varepsilon^2 = d_{-2}^{(2)} \varepsilon^2 = \left[\frac{a}{2} \cos(\varphi_0 - \delta) - \frac{1}{4} \sin^2(\varphi_0 - \delta)\right] \varepsilon^2$$

zu beachten. Da die Gleichungen (33,00), (33,N,0) und (33,N,1) davon unbeeinflußt bleiben, gilt der Ausdruck (34) für den charakteristischen Exponenten auch jetzt noch. Eine weitergehende Rechnung bestätigt ferner auch hier $\varrho^{(2)} = 0$.

Die im Vorstehenden geleistete Berechnung des charakteristischen Exponenten gestattet die Beantwortung der Stabilitätsfrage in dem hier benötigten Umfange sowohl für rein harmonische Erschütterung als auch für den behandelten Fall der allgemeineren Erschütterung durch einen Schubkurbelantrieb.

Zufolge von (29) und (32) kommt es zur Beurteilung des Zeitverhaltens einer Störung u auf den Stabilitätsindex

$$I = Re\,(-D\,\alpha_F \pm i\,\varrho) \tag{35}$$

an. Nur wenn $I < 0$ wird, ist die zugehörige Schwingung $\varphi(\tau)$ stabil im dem hier verwendeten Sinne. In (35) hat ϱ den durch (34) gegebenen Wert. Um die Abhängigkeit von den eigentlichen mechanischen Größen des Problems zu erkennen, wird ϱ^2 mit den ursprünglichen Bezeichnungen

in die stets reelle Form

$$\varrho^2 \approx \varrho^{(1)^2}\varepsilon^2 = \alpha_F^2(1-D^2) - \alpha_0^2 \sin\varphi_0 + \frac{\varepsilon^2}{2}\cos 2(\varphi_0-\delta) = M'(\varphi_0) - D^2\alpha_F^2 \tag{36}$$

gebracht. Falls $M' - D^2\alpha_F^2 > 0$ gilt, ist für das Gerät und die gewählten Werte von Erregerfrequenz und Amplitude $I < 0$ und die Stabilität der Schwingung um die Mittellage φ_0 daher gesichert. Falls jedoch $M' - D^2\alpha_F^2 < 0$ ist, wird der zweite Bestandteil in (35) reell und kann dann Instabilität anzeigen. Dieser Instabilitätsfall tritt ein, wenn aus (35) mit (36)

$$I = Re\left(-D\alpha_F \pm i\sqrt{M'(\varphi_0) - D^2\alpha_F^2}\right) \geqq 0$$

folgt und also die beiden Ungleichungen

$$M'(\varphi_0) - D^2\alpha_F^2 < 0\,, \qquad -D\alpha_F + \sqrt{D^2\alpha_F^2 - M'(\varphi_0)} \geqq 0$$

gleichzeitig erfüllt sind. Dies ist gegeben, wenn nur $M'(\varphi_0) \leq 0$ ist.

Mithin herrscht keine Stabilität mehr, wenn

$$\frac{\alpha_F^2}{\alpha_0^2} - \sin\varphi_0 + \frac{\zeta}{2}\cos 2(\varphi_0-\delta) \leq 0 \tag{37}$$

ist, worin ζ wieder den Intensitätsparameter von (24) bezeichnet.

Überraschenderweise ist für die Entscheidung über die Stabilität in dieser Näherung die Kenntnis der Dämpfung nicht erforderlich. Die Gleichung (37) gilt, wie auseinandergesetzt, auch für den betrachteten Fall allgemeinerer Erschütterung. Eine etwaige Abweichung des Federaufzugswinkels und eine dadurch bedingte statische Ruhelage des Pendels außerhalb der Horizontalen geht über die Mittellagengleichung (22,1) in φ_0 ein und ist infolgedessen auch von stärkstem Einfluß für die Stabilitätsaussage (37). Zahlenbeispiele werden die Bedeutung dieses Nullfehlers für die Stabilität der Schwingungen deutlich machen.

Ohne auf Zahlenrechnungen zurückzugreifen, läßt sich die Stabilität eines Meßgerätes mit vertikaler Erschütterung ($\delta = 90°$) und mit fehlerfreiem Federaufzugswinkel φ_F nach (4) untersuchen. Gemäß (22,1) mit $\Delta = 0$ besteht hier die Möglichkeit der erzwungenen Schwingungen um den Sollwert der statischen Ruhelage $\varphi_0 = 0$. Dann besagt (37) wegen $2(\varphi_0 - \delta) = \pi$ einfach, daß Instabilität eintritt, wenn

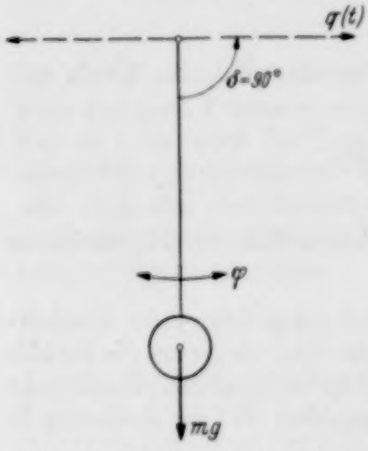


Abb. 4. Horizontal erschüttertes Schwerependel zum Vergleich.

$$\frac{\alpha_F^2}{\alpha_0^2} - \frac{\zeta}{2} \leq 0 \tag{38}$$

ist. Ausgedrückt in den ursprünglichen mechanischen Größen ergibt diese Ungleichung zufolge der Abkürzungen (8), (9), (10) und (24), daß für Instabilität

$$u_0\,\omega \geqq \sqrt{2}\,l\,\omega_F \tag{39}$$

sein muß. Demnach muß die Geschwindigkeitsamplitude der harmonischen Erschütterung größer sein als $\sqrt{2}$ mal dem Produkt aus reduzierter Pendellänge und der Eigenfrequenz des Gerätes. Diese Bedingung für Instabilität der Schwingungen um die statische Gleichgewichtslage ist auffälligerweise formal genau die gleiche, wie man sie von einem verwandten Problem des erschütterten Schwerependels her kennt. Wird nämlich ein Schwerependel rechtwinklig zu seiner statischen Ruhelage erschüttert (Abb. 4), so kann die Instabilitätsgrenze auch bei diesem andersartigen Problem aus (39) berechnet werden, wenn man ω_F durch die beim Schwerependel allein vorhandene Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ ersetzt. Man kann dann (39) auch in die Formel von *K. Klotter*[1]

$$u_0^2\,\omega^2 \geqq 2\,l^2\,\omega_0^2 = 2\,l\,g$$

überführen. Die Verwandtschaft der Probleme des erschütterten Schwerependels und des erschütterten Meßgerätes ist also noch zu erkennen. Allerdings sind die Auswanderungslagen des Meßgerätes wesentlich durch die Eigenschaften der Rückstellfeder bedingt. Da das Schwerependel keine Federrückstellung besitzt, sondern allein durch die Schwere zurückgeführt wird, hat die Verwendbarkeit der Untersuchungen des Pendels als Modell für Auswanderungserscheinungen von Meß- und Anzeigegeräten bezüglich der zahlenmäßigen Ergebnisse enge Grenzen.

[1] Vgl. S. 379 der in Fußnote 2 auf Seite 43 genannten zusammenfassenden Darstellung.

Die vorstehenden Rechnungen beschränken sich auf die Berechnung der Stabilität gegen infinitesimale Störungen der zu prüfenden Schwingungen. Tatsächlich wäre eine Untersuchung der Stabilität gegen endliche Störungen den praktischen Gegebenheiten besser angepaßt, da man beispielsweise sogar beim stehenden Meßgerät schon durch eine hinreichend große Anfangsauslenkung das Meßpendel über eine instabile Federgleichgewichtslage hinausführen kann, so daß eine andere und stabile Gleichgewichtslage angenommen wird (vgl. Abb. 5, statische Auslenkung größer $\varphi_{0\,Stat.} = 41{,}4°$ führt auf stabile Gleichgewichtslage $\varphi_{0\,Stat.} = 242{,}4°$). Doch würde eine derartige Stabilitätsuntersuchung im Großen mathematisch so weitläufig werden, daß die Beschränkung auf die Untersuchung der infinitesimalen Stabilität geboten erschien. Bei einer experimentellen Prüfung der Stabilitätstheorie hat man entsprechend vorsichtig zu arbeiten, um größere Störamplituden zu vermeiden.

5. Numerische Ergebnisse[1]. Die allgemein abgeleiteten Ergebnisse sollen nun durch spezielle Zahlenbeispiele illustriert werden. Zu dem Zweck werden die Auswanderungsmittellagen φ_0 abhängig von der jeweiligen Erschütterungsintensität ζ berechnet. In dieser Rechnung wird stets streng harmonische Erschütterung ($\Pi(\tau) = \cos\tau$) in der Lotrichtung ($\delta = 90°$) vorausgesetzt, weil diese Erschütterungsbelastung die in der Praxis häufigste sein dürfte und außerdem dieser Fall zahlenmäßig am einfachsten durchzuführen ist. Die jeweiligen für das Meßgerät kennzeichnenden Gerätedaten sind die Eigenfrequenzen ω_F und ω_0 (aus (8) und (9), die durch den Quotienten ω_F^2/ω_0^2 mit verschiedenen Werten in die Rechnung aufgenommen werden. Als für die Zahlenergebnisse sehr wesentlich wird sich, wie schon erwähnt, ein etwaiger Nullfehler durch fehlerhaften Federaufzug erweisen. Die Rechnung darf also nicht auf das fehlerfreie Gerät ($\Delta = 0$ nach (23)) beschränkt bleiben, sondern muß auch Werte $\Delta \neq 0$ für nicht streng horizontale statische Ruhelage berücksichtigen. Da der Mittellagenwinkel φ_0 die erzwungenen Schwingungen kennzeichnet, sind nach der Berechnung von φ_0 als mehrdeutige Funktion des Intensitätsparameters ζ alle Schwingungsmöglichkeiten des Gerätes bekannt. Eine abschließende Rechnung hat dann zu entscheiden, ob die jeweiligen Schwingungen stabil sind oder als instabil keine physikalische Realität besitzen.

Zur Bestimmung der Mittellagen φ_0 sind die Wurzeln der transzendenten Gleichung (22,1) für von Null an wachsenden Intensitätsparameter ζ aufzusuchen. Zu dem Zweck genügt im allgemeinen für die angestrebte begrenzte Genauigkeit der Zahlenrechnung eine grafische Auswertung, wobei φ_0 als Schnittabszisse der beiden Kurven $F_1 = \zeta/4 \sin 2\varphi_0$ und $F_2 = (\varphi_0 - \Delta)\,\alpha_F^2/\alpha_0^2 + \cos\varphi_0 - 1$ bestimmt werden. Die Variation des Parameters ζ verlangt also lediglich die Zeichnung von sin-Kurven verschiedener Amplituden, während ein Nullfehler nur eine Parallelverschiebung der Kurven F_2 erforderlich macht. Für jedes Gerät mit anderen Eigenfrequenzen hat allerdings $\alpha_F^2/\alpha_0^2 = \omega_F^2/\omega_0^2$ einen anderen Wert, so daß die Kurve F_2 neu zu zeichnen ist. Da die Stabilitätsuntersuchung für ein Wertepaar φ_0, ζ auf die Frage nach dem Vorzeichenwechsel der linken Seite von Gleichung (37) hinausläuft, kann man nach den speziellen Wertepaaren $\bar{\varphi}_0, \zeta$ fragen, für welche gerade die Stabilitätsgrenze erreicht wird. Diese Werte $\bar{\varphi}_0, \zeta$ berechnen sich aus

$$\frac{\alpha_F^2}{\alpha_0^2} - \sin\bar{\varphi}_0 - \frac{\zeta}{2}\cos 2\bar{\varphi}_0 = 0 \tag{40}$$

und können als Kurven zur Beschreibung der Stabilitätsgrenzen in die Diagramme der Mittellagen $\varphi_0(\zeta)$ eingetragen werden. Durch (40) ist also die Stabilitätsentscheidung wieder auf die Lösung einer transzendenten Gleichung zurückgeführt. Die Auswertung geschah wiederum grafisch durch Aufsuchen der Schnittpunkte der Kurve $G_1 = \alpha_F^2/\alpha_0^2 - \sin\varphi_0$ und $G_2 = \zeta/2 \cos 2\varphi_0$. Für Kurventeile, bei welchen die grafische Auswertung keine zufriedenstellende Genauigkeit ergab, wurden einzelne Werte von ζ für vorgegebene Werte von φ_0 unmittelbar aus den Gleichungen (22,1) und (40) berechnet.

In Abb. 5 sind die Mittellagenwinkel φ_0 abhängig von der Erschütterungsintensität ζ für einen bewährten Schwingweggeber mit $\omega_F^2/\omega_0^2 = 0{,}346$ aufgetragen. Außer den Kurven für das fehlerfreie Gerät ($\Delta = 0$) sind auch die Werte $\varphi_0(\zeta)$ für das gleiche Gerät bei etwa vorhandenen Nullfehlern ($\Delta = -15°, -10°, -5°, +5°, +10°, +15°$) eingetragen. Die eingezeichneten Stabilitätsgrenzkurven teilen die (φ_0, ζ)-Ebene in Gebiete auf, in denen Wertepaare liegen, die entweder zu stabilen oder zu instabilen Schwingungen gehören.

Man entnimmt dem Diagramm zunächst für ein fehlerfreies Gerät ($\Delta = 0$) die wichtige Tatsache, daß zu einem bestimmten Intensitätswert der Erschütterung $\zeta = q_0^2\,\omega^2/g\,l$ stets mehrere

[1] Bei den numerischen Auswertungen haben mich die Herren *F. Leiss* und *R. Buttmi* wirksam unterstützt, was durch eine Zuwendung der Karlsruher Hochschulvereinigung e. V. in dankenswerter Weise ermöglicht wurde.

Werte der Mittellage φ_0 gehören. Es besteht also für jede beliebige Amplitude und Frequenz der Erschütterung ein mehrdeutiger Schwingungszustand. Allerdings sind in wirklichen Geräten im allgemeinen nur solche Schwingungen möglich, deren Mittellagen φ_0 in unmittelbarer Nachbarschaft der Sollage $\varphi_0 = 0$ liegen, da meist Anschläge die Bewegungsmöglichkeit des Schwingers begrenzen, so daß dieser bei größeren Beträgen von φ_0 anliegt, ohne noch schwingen zu können.

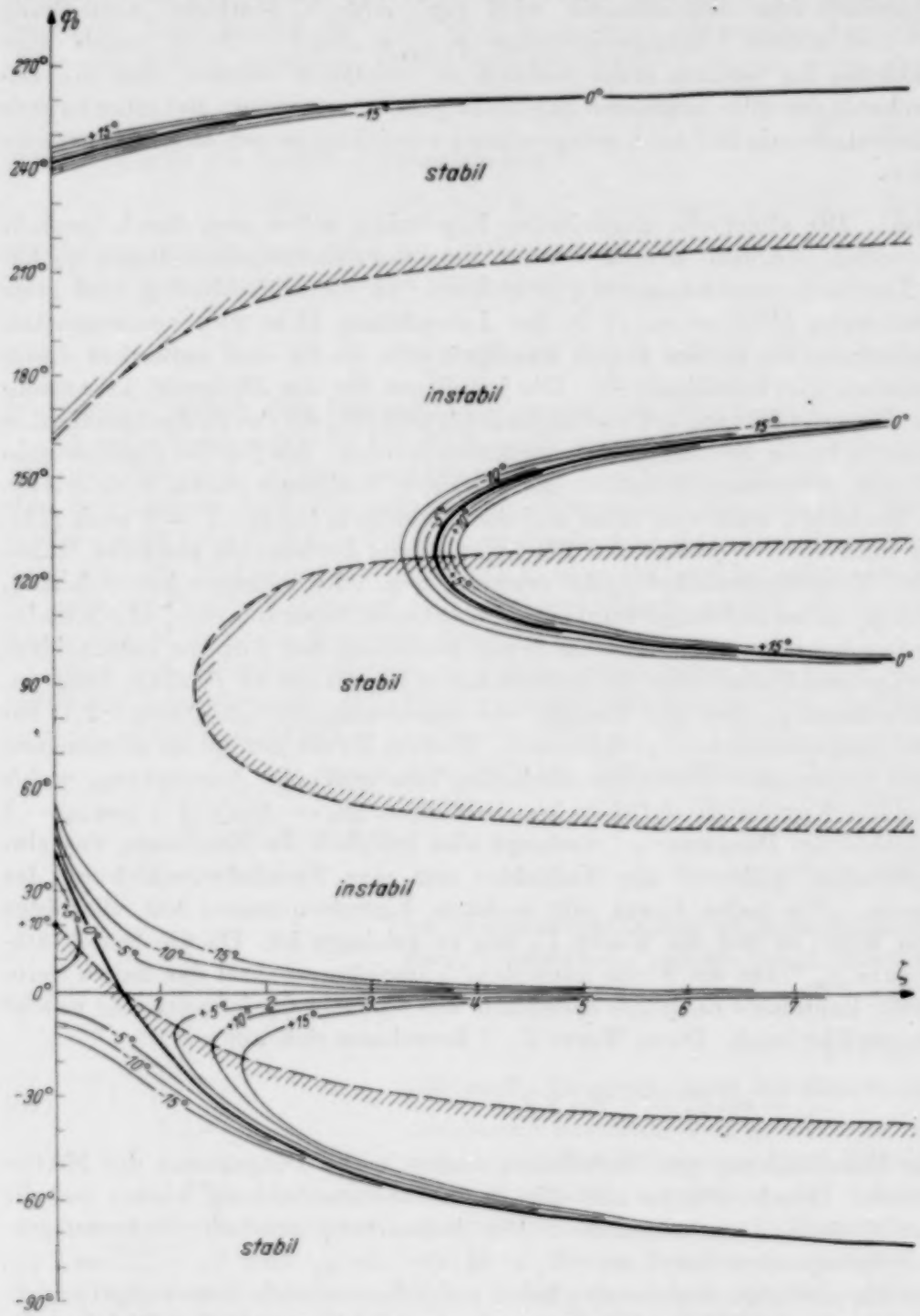


Abb. 5. Auswanderungs-Mittellagen φ_0 abhängig von der Erschütterungsintensität ζ mit Federaufzugsfehlern $\Delta = 0$, $\pm 5°$, $\pm 10°$, $\pm 15°$ als Kurvenparametern für harmonische Erschütterung in Lotrichtung.

Betrachtet man das fehlerfreie Gerät bei aus der Ruhe anwachsender Erschütterung, so findet man den Schwinger zunächst in der statischen Ruhelage $\varphi_0 = 0$. Er beginnt sodann bei Erschütterung mit kleiner Intensität ζ mit der gleichen Lage φ_0 als Mittellage zu schwingen. In der folgenden Betrachtung wird vorausgesetzt, daß sich diese Schwingungen ungehindert ausbilden können, wozu also etwaige Anschlagbegrenzungen entfernt werden müssen. Steigert man die Intensität ζ weiter und über den aus (40) folgenden Wert

$$\zeta = 2\,\alpha_F^2/\alpha_0^2 = 0{,}692$$

hinaus, so ist zwar $\varphi_0 = 0$ immer noch Lösung von (22,1), doch hat man die Stabilitätsgrenze in ein instabiles Gebiet hinein überschritten. Die zugehörigen Schwingungen um die gewünschte Mittellage $\varphi_0 = 0$ sind also instabil und der Schwinger kann auswandern. Eine kleine Störung wird ihn im allgemeinen zu Schwingungen um negative, d. h. unter der Horizontalen liegenden Mittellagen φ_0 veranlassen. Bei wachsender Erschütterungsintensität wird die zugehörige Mittellage φ_0 mehr und mehr aus dem Wert $\varphi_0 = 0$ auswandern und schließlich bei über alle Grenzen anwachsender Intensität den Wert $\varphi_0 = -90°$ annehmen. Bei der vorausgesetzten vollen Bewegungsfreiheit des Schwingers könnte im Instabilitätsfall die Auswanderung aus der Mittellage $\varphi_0 = 0$ auch durch die Überkopflage $\varphi = +90°$ in Schwingungen mit Mittellagen in der Nähe der stabilen Gleichgewichtslage $\varphi_{0\,\mathrm{Stat.}} = 242{,}4°$ hinein erfolgen. Bei großen Intensitäten nähert sich die Mittellage dieser Schwingung dem Wert $+270°$, so daß sich der Schwinger schließlich wiederum der gleichen Vertikalen ($-90°$) nähert. Dieses Verhalten ist durchaus verständlich, denn bei unbegrenzt wachsender Intensität wird der Schwinger auf jeden Fall vollends in die vertikale Erschütterungsrichtung gezogen. Bei großen Intensitäten (etwa $\zeta > 3$) weist die Abb. 5 tatsächlich auch stabile Schwingungen in der Überkopflage aus. Bei unbegrenzt

wachsender Erschütterungsintensität nimmt die Mittellage φ_0 schließlich den Wert $\varphi_0 = 90°$ an, so daß das Hineinwandern in die Erschütterungsrichtung bei hinreichend großen Intensitäten also auf allen Wegen möglich ist.

Für die Praxis sind nur kleine Erschütterungsintensitäten ζ und wegen der Ausschlagbegrenzung auch nur kleine Mittellagen φ_0 von wesentlichem Interesse. Richtet man in der Abb. 5 die Aufmerksamkeit auf den dann verbleibenden kleinen Ausschnitt in der Nähe des Ursprungs, so stellt man hier einen besonders großen Einfluß etwaiger Fehler beim Aufzug der Feder fest. Ein Aufzugsfehler gemäß (23) hat für das nicht erschütterte Gerät eine statische Ruhelage zur Folge, in welcher der Schwinger nicht genau in der Horizontalen liegt, sondern davon um einen Winkel $\varphi_{0\,Stat.}$ abweicht. Dieser Winkel berechnet sich aus (22,0) für $\zeta = 0$ wiederum als Lösung einer transzendenten Gleichung. Die Ergebnisse dieser Rechnung für verschiedene Aufzugsfehler Δ sind in der Tabelle 1 angegeben. Ferner sind in die Tabelle auch die Werte $\varphi_{0\,Stat.}$ für diejenigen statischen Gleichgewichtslagen aufgenommen, die nicht in der Nähe der Sollage $\varphi_0 = 0$ liegen. Für das betrachtete Gerät gibt es im allgemeinen drei statische Gleichgewichtslagen, von denen jedoch die im ersten Quadranten oberhalb $\varphi_{0\,Stat.} = 20{,}3°$ liegenden nicht stabil sind. Diese statische Instabilität erkennt man mit Hilfe des Potentials (3) daran, daß für die in Betracht kommenden Werte $\varphi = \varphi_{0\,Stat.}$ im ersten Quadranten $\partial^2 V/\partial\varphi^2 < 0$ wird. Bemerkenswerterweise gibt es für eine um ein Weniges zu weit aufgezogenen Rückstellfeder ($\Delta > +10°$) bereits keine statische Gleichgewichtslage in der Nähe der Sollage $\varphi_0 = 0$ mehr, während für $\Delta = 10°$ gerade beide Gleichgewichtslagen im ersten Quadranten zusammenfallen. Als einzige statische Ruhelagen verbleiben dann nur praktisch uninteressante Lagen im dritten Quadranten.

Tabelle 1

Δ	−15°	−10°	−5°	0°	5°	10°	15°
$\varphi_{0\,Stat.}$	−11,6°	−8,2°	−4,5°	0 °	5,9°	20,2°	—
	54,5°	50,7°	46,4°	41,4°	35,0°	20,2°	—
	238,1°	239,6°	241,0°	242,4°	243,8°	245,2°	246,6°

Selbst der Einfluß eines nur kleinen Nullfehlers auf die Auswanderungserscheinung ist von überraschender Größe. Betrachtet man z. B. ein Gerät mit einer nur geringfügig zu weit aufgezogenen Rückstellfeder, so wird dadurch der stabile Arbeitsbereich des Gerätes so stark verkleinert, daß seine praktische Brauchbarkeit in Frage gestellt ist. Z. B. entnimmt man der Abb. 5 für einen Federaufzugsfehler $\Delta = +5°$, für welchen also der Schwinger in der statischen Ruhelage um nur 5,9° aus der Horizontalen herausgehoben ist, bereits ein starkes Absinken der Stabilitätsgrenze von etwa $\zeta = 0{,}7$ auf etwa $\zeta = 0{,}2$. Für größere Aufzugsfehler im gleichen Sinne ist das Gerät überhaupt nicht mehr zu stabilen Schwingungen um die statische Sollage fähig. Ganz andere Konsequenzen hat ein zu schwacher Aufzug der Rückstellfeder. Wie man aus der Abb. 5 ersehen kann, hebt auch die kleinste negative Winkelabweichung Δ die Instabilität in dem Sinne völlig auf, daß nun ein stetiges Anwachsen des Betrages der Mittellage zu negativen Werten von φ_0 hin eintritt. Das bedeutet für den Schwinger bei wachsender Erschütterungsintensität eine allmähliche Auswanderung der Mittellage φ_0 auf den Wert $\varphi_0 = -90°$ zu. Ein solches Verhalten ist zwar für Anzeigegeräte durchaus unerwünscht, doch liefert ein Schwingweggeber in diesem Falle immer noch auswertbare Anzeigen. Falls man also Toleranzen für den Bau von Schwingweggebern hinsichtlich der Horizontallage des Gebers in der Ruhelage vorgeben muß, sind bei vertikaler Erschütterung Lagen des Schwingers unter der Horizontalen mit zugehörigem zu schwachem Federaufzug unbedingt zu bevorzugen. Für die übrigen stabilen Mittellagen φ_0 haben die Aufzugsfehler nur den aus der Abb. 5 ersichtlichen geringen Einfluß im Sinne einer kleinen Verschiebung der Zahlenwerte φ_0, die für das fehlerfreie Gerät berechnet werden.

Die vorstehenden Ergebnisse gelten nur für ein spezielles, durch das Frequenzverhältnis $\omega_F^2/\omega_0^2 = c/M\,g\,s = 0{,}346$ gekennzeichnetes Gerät.

In einer weiteren Rechnung wurden daher die Geräte mit verschiedenen Daten in den Grenzen $0 < \omega_F^2/\omega_0^2 \leqq 2$ untersucht. Dabei wurden nullfehlerfreie Geräte vorausgesetzt und auch die Rechnung auf den vorzugsweise interessierenden Bereich in der Nähe der Sollage $\varphi_0 = 0$ beschränkt. Die Ergebnisse der Berechnung von φ_0 und der zugehörigen Stabilitätsuntersuchung sind in Abb. 6 aufgetragen. In dieser Abbildung sind diejenigen Kurvenäste $\varphi_0(\zeta)$, die zu einer instabilen Schwingung gehören und daher keine physikalische Bedeutung haben, gestrichelt eingezeichnet. Man entnimmt der Darstellung zunächst die einleuchtende Tatsache, daß mit kleiner werdendem ω_F^2/ω_0^2

auch die Stabilitätsgrenze für die Schwingungen um die Sollage absinkt. Aus Gleichung (40) ist der Wert der kritischen Erschütterungsintensität zahlenmäßig bekannt: $\zeta = 2\,\omega_F^2/\omega_0^2$. Demnach sind gerade Schwingweggeber mit der bei diesen Geräten erwünschten tiefen Eigenfrequenz $\omega_F = \sqrt{c/J}$ besonders anfällig für Auswanderungserscheinungen und man muß sich daher bemühen, die Frequenz $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ durch eine große reduzierte Pendellänge l von gleicher Größenordnung wie ω_F klein zu halten. Aus konstruktiven Gründen kommt man hier allerdings bald an eine Grenze. Geräte mit hohen Eigenfrequenzen können in der Praxis wohl kaum auswandern, da die bei ihnen erforderlichen großen Erschütterungsintensitäten selten erreicht werden.

Der Verlauf der $\varphi_0(\zeta)$-Kurven für wachsende Werte ω_F^2/ω_0^2 ist durchaus plausibel. Betrachtet man zunächst Geräte mit sehr weicher Rückstellfeder, so ist ω_F^2/ω_0^2 klein und man erhält außer der stets vorhandenen Kurve $\varphi_0 = 0$ eine Kurve vom Typ der für $\omega_F^2/\omega_0^2 = 0{,}346$ gezeichneten. Sie beginnt in der instabilen Ruhelage $\varphi_{0\,\mathrm{Stat.}} = 41{,}4°$ und trennt dann auf der ζ-Achse den stabilen

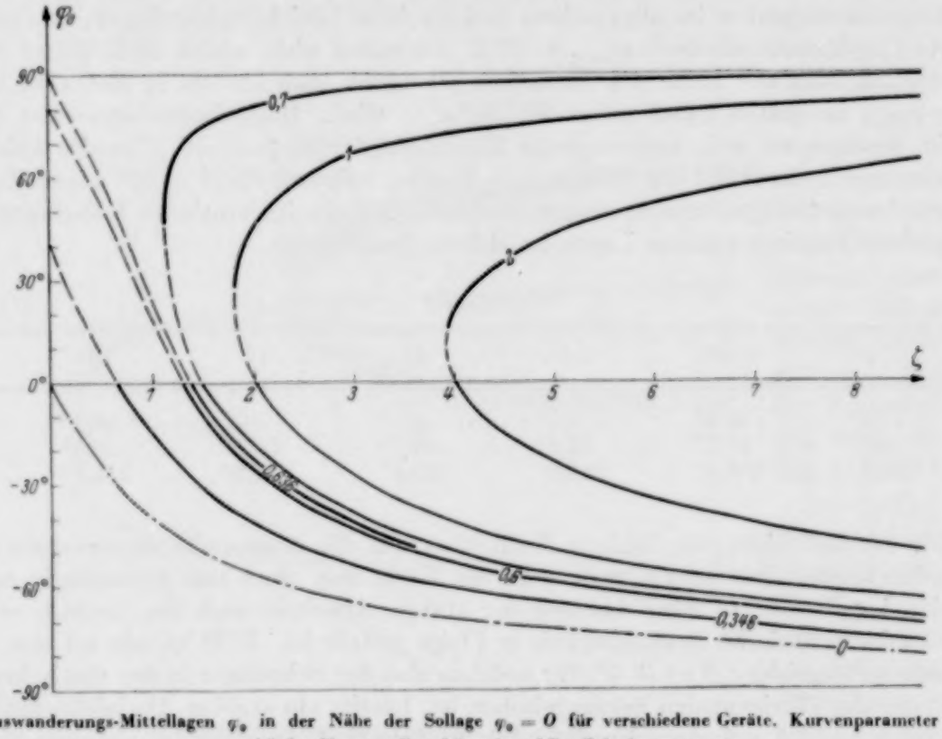


Abb. 6. Auswanderungs-Mittellagen φ_0 in der Nähe der Sollage $\varphi_0 = 0$ für verschiedene Geräte. Kurvenparameter ist ω_F^2/ω_0^2, gestrichelte Kurventeile gehören instabilen Schwingungen zu.

vom instabilen Bereich. Dabei gehört die φ_0-Kurve von diesem Durchgang an selbst zu stabilen Schwingungen und mit wachsenden Intensitäten nähert sich φ_0 seinem Grenzwert $\varphi_0 = -90°$ für unendlich große Intensitäten.

Die strichpunktiert eingetragene Kurve für $\omega_F^2/\omega_0^2 = 0$ hat keine wirkliche Bedeutung, sondern ist als gedachter Grenzfall für eine Feder mit verschwindender Federsteife aufzufassen. Denn für überhaupt fehlende Feder verschwindet außer ω_F auch φ_F und man hat φ_0 nicht aus der Gleichung (22, 1), sondern aus der noch nicht umgeformten Gleichung (22) zu berechnen. Man erhält dann richtig $\varphi_0 = \pm 90°$ als mögliche Ruhelagen und wird auf die Theorie des erschütterten Schwerependels zurückgeführt.

Verfolgt man in Abb. 6 die Kurven für wachsende Parameter ω_F^2/ω_0^2, so kommt man schließlich für $\omega_F^2/\omega_0^2 = 2/\pi = 0{,}636\ldots$ auf eine Kurve, die als instabile statische Ruhelage gerade die Überkopflage $\varphi_0 = 90°$ besitzt. Diese Kurve ist insofern die letzte Kurve des beschriebenen Types, als für größere Parameterwerte nur noch zwei aus der ζ-Achse verzweigte Kurvenäste der φ_0-Kurven entstehen. Der zu kleineren Werten von φ_0 gehörende Zweig nähert sich mit wachsender Intensität wieder dem Wert $\varphi_0 = -90°$. Er gehört stets zu einer stabilen Schwingung. Der obere Ast der φ_0-Kurve läuft auf den Wert $\varphi_0 = 90°$ zu und ist bei großen Intensitäten ebenfalls einer stabilen Schwingung zugeordnet. Dieses Ergebnis zeigt die Stabilisierbarkeit des Schwingers in der Erschütterungsrichtung bei großen Intensitäten an und ist auch aus der Pendeltheorie geläufig.

Die in Abb. 5 und 6 zusammengestellten Ergebnisse der Zahlenrechnung dürften die wesentlichen Aussagen der vorliegenden Theorie illustrieren, so daß anschließend nur noch über einige experimentelle Ergebnisse berichtet werden soll.

6. Experimentelle Ergebnisse. Um einige wesentliche Ergebnisse der vorstehenden Theorie zu bestätigen, wurden von *G. Benz* und *H. Heidenhain* einige Versuchsreihen mit einem Modell durchgeführt. Ziel dieser Versuche war vor allem, die bemerkenswerte Abhängigkeit der Auswanderungserscheinungen von dem Federaufzugswinkel auch in einem Experiment sichtbar zu machen. Dabei sollten nur die Ergebnisse der Theorie und der Zahlenrechnung nachgeprüft werden, nicht aber die Voraussetzung der Vernachlässigbarkeit der Federschwingungen für die Auswanderungserscheinungen.

Zur Durchführung der Versuche wurde ein kleines Horizontalpendel sorgfältig in Kugellagern gelagert und mit einer verstellbaren Torsionsdrahtrückstellung in die horizontale Lage geführt. Der Torsionsdraht wurde in Richtung quer zur Erschütterung so steif gewählt, daß er nicht zu nennenswerten Querschwingungen angeregt wurde. Die ganze Anordnung wurde auf einem Rütteltisch fest verschraubt und konnte in vertikaler Richtung erschüttert werden (Abb. 7). Dabei war die Amplitude durch die Exzenterstellung und die gewählte Untersetzung des Antriebes durch einen Kurbeltrieb fest gegeben. Hingegen konnte durch den zwangsläufigen Antrieb des Tisches die Erschütterungsfrequenz unabhängig von der Amplitude in weiten Grenzen über die Drehzahl des Antriebsmotors geregelt werden. Die für die Messungen erforderliche hohe Frequenzkonstanz und der Übergang auf jeweils nahe benachbarte Frequenzen machte allerdings die Verwendung eines gittergesteuerten Gleichrichters zur Speisung des Gleichstrom-Antriebsmotors erforderlich. Da sich kleine Abweichungen vom rein harmonischen Verlauf der Erschütterungsbeschleunigung in der Theorie als nicht wesentlich erwiesen haben, war die Verwendung des Rütteltisches in dieser Hinsicht unbedenklich. Auf den Einbau eines besonderen Dämpfers in das Modell wurde verzichtet, weil sich die Dämpfungskräfte in der Theorie als nicht wesentlich gezeigt hatten.

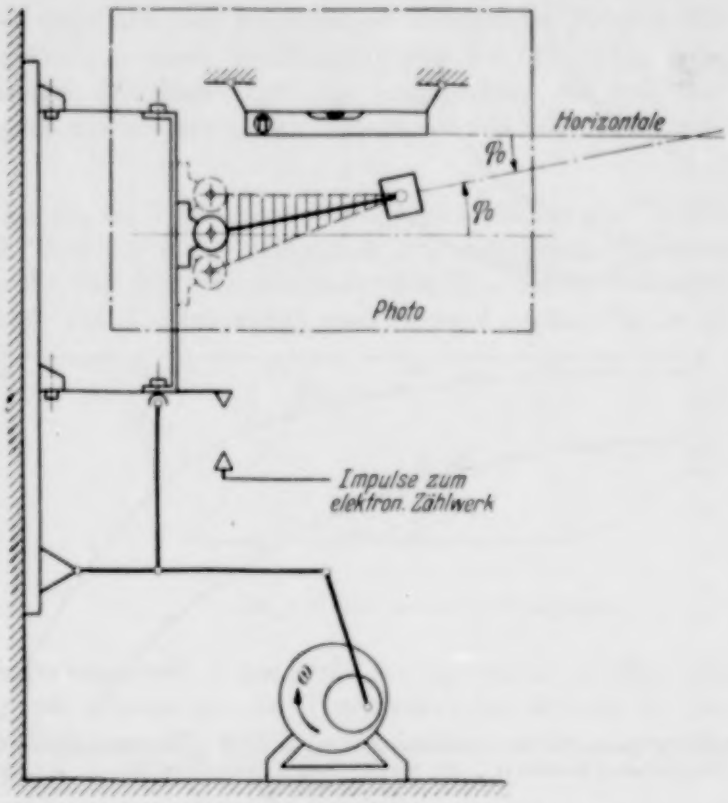


Abb. 7. Versuchsanordnung (schematisch).

Die Messungen wurden mit fester Erschütterungsamplitude ($q_0 = 5$ mm) und mit von Null an wachsenden Frequenzen ausgeführt. Dabei wurden die Frequenzen durch Zählung mit einem elektronischen Zählwerk während eines Zeitintervalles von 30 sec. Dauer bestimmt. Die beobachteten Mittellagenwinkel (d. h. $\varphi_0 + c_0$) wurden jeweils aus einer photographischen Aufnahme mit 10 sec. Belichtungsdauer entnommen. Zu dem Zweck wurde die Horizontale durch eine Wasserwaage kenntlich gemacht und mit photographiert. Nach Entwicklung des Films ließen sich dann unter dem Vergrößerungsgerät die Abstände des Umrißbildes des Schwingers von der Horizontalen messen und daraus der Mittellagenwinkel genügend genau berechnen.

Um das Frequenzverhältnis ω_F/ω_0 für das Schwingermodell zu ermitteln, wurden die Eigenfrequenzen ω_F und ω_0 des Schwingers einzeln mit Hilfe von Ausschwingversuchen bestimmt. Zunächst wurde das Modell als Horizontalpendel durch eine Anfangsauslenkung aus der horizontalen Gleichgewichtslage zu kleinen Schwingungen veranlaßt und daraus die Eigenfrequenz ω_F gefunden. Zur Bestimmung der Eigenfrequenz ω_0 dagegen wurde die Federrückstellung vollständig abgeschaltet, so daß der Schwinger als reines Schwerependel schwingen konnte. Um bei diesen Ausschwingversuchen die Zeitabhängigkeit des Winkelausschlages registrieren zu können, wurde der Pendelkörper in den Strahlengang einer beleuchteten Photozelle eingebracht, so daß die Abdeckung der Zelle als elektrische Spannungsschwankung auf dem Bildschirm eines Kathodenstrahloszillographen sichtbar gemacht werden konnte. Der Ausschwingvorgang ließ sich so auf dem Bildschirm zugleich mit einer Zeitmarke photographieren und im Hinblick auf die gesuchten Eigenfrequenzen ω_F und ω_0 und die reduzierte Pendellänge auswerten. Zur Herabsetzung der Lagerreibung wurde bei diesen Ausschwingversuchen zwar das Modell vorsichtig erschüttert, aber dennoch

konnten die Frequenzen ω_F und ω_0 nicht sehr genau bestimmt werden. Diese Tatsache hat jedoch keine Einschränkung der Versuchsergebnisse zur Folge, da der gefundene Wert $\omega_F^2/\omega_0^2 = 0{,}353$ zweifelsfrei sicherstellt, daß zu den Versuchen Kurven vom Typ der berechneten und in Abb. 5 wiedergegebenen gehören. Die reduzierte Pendellänge ergab sich aus ω_0 zu $l = 10{,}6$ cm.

In Abb. 8 sind die gemessenen Werte des Mittellagenwinkels (d. h. $\varphi_0 + c_0$) abhängig von der Erschütterungsintensität $\zeta = q_0^2\,\omega^2/l^2\,\omega_0^2$ für fünf verschiedene kleine statische Vorauslenkungen aufgetragen. Darin kennzeichnen die Pfeile bei positiven Werten von φ_0 diejenigen Intensitäten, bei denen mit Sicherheit keine stationären Schwingungen zu finden waren. Jedoch waren bereits bei etwas kleineren Intensitäten keine reproduzierbaren Meßwerte für φ_0 mehr zu erhalten, da bei diesen Werten von ζ die Stabilität der Schwingungen schon verschwindend klein war. Hingegen erreicht man auf den zu negativen Meßwerten von φ_0 gehörenden Kurven keine Stabilitätsgrenze. Jedoch konnten größere Erschütterungsintensitäten als etwa $\zeta = 0{,}5$ mit dem verwendeten Schütteltisch nicht erreicht werden. — Die Meßwerte der Abb. 8 lassen den gleichen Verlauf und die gleiche Abhängigkeit von einem fehlerhaften Federaufzug erkennen, wie die in Abb. 5 (ohne die Korrekturen c_0) aufgetragenen, berechneten Mittellagen φ_0. Die Beträge der Korrekturen c_0 waren nach der Rechnung in der Größenordnung $\varepsilon^2 = 0{,}0022 \approx 0{,}07°$ zu erwarten und konnten daher als praktisch bedeutungslos und außerhalb der Meßgenauigkeit liegend unbeachtet bleiben. Die Übereinstimmung von Rechnung und Messung ist damit in dem hier angestrebten Umfange gezeigt.

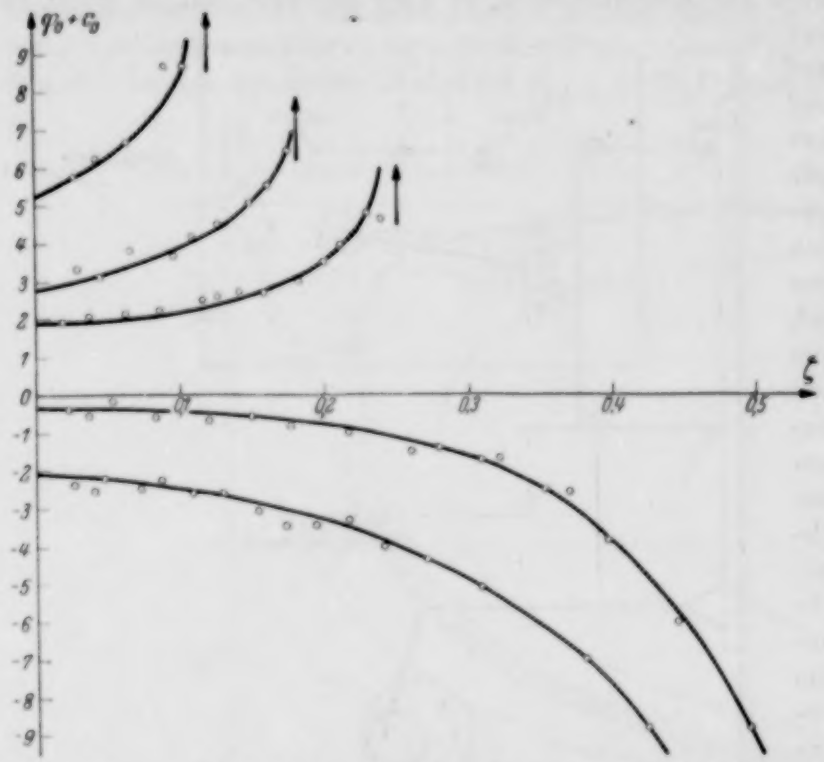


Abb. 8. Gemessene Auswanderungs-Mittellagen ($\varphi_0 + c_0$) in Abhängigkeit von der Erschütterungsintensität ζ für verschiedene Federaufzugsfehler Δ bei vertikaler Erschütterung.

7. Zusammenfassung. Drehschwingungsfähige Systeme wie Schwingweggeber oder Drehspulsysteme in elektrischen Meßgeräten können unter der Wirkung von Erschütterungen sehr hoher Frequenz erzwungene Schwingungen um andere Mittellagen als ihre statischen Sollagen ausführen. Dieses Phänomen ist seit langem als „Auswanderungserscheinung" bekannt, und man hat das Verhalten des erschütterten Schwerependels häufig zum Verständnis dieser Erscheinung herangezogen. Da aber das Schwerependel als Rückstellkraft allein die Schwerkraft besitzt, für den Schwingweggeber die Rückstellung jedoch durch eine Feder erfolgt und die Schwerkraft in anderem Sinne in das Kräftespiel eingreift, wurde zur Berechnung der Auswanderungserscheinungen eine erweiterte Theorie entwickelt. Die notwendig nichtlineare Rechnung erfaßt eine Rückstellung durch eine Spiralfeder, wobei jedoch in der Rechnung von den Schwingungseigenschaften dieses Federkontinuums abgesehen wird. Die Untersuchung des dann verbleibenden nichtlinearen Schwingungsproblemes mit einem Freiheitsgrad und die anschließende Stabilitätsuntersuchung verwendet ähnlich einem Vorschlag von *K. L. Stellmacher* direkte *Fourier*ansätze und bestimmt die Koeffizienten durch eine nachfolgende Störungsentwicklung. Die Mittellagen φ_0 der ausgewanderten Schwingungen und die Stabilität dieser Schwingungen werden abhängig von der Intensität (ζ nach (24)) der Erschütterung angegeben. Während sich der Einfluß hinreichend kleiner höherer Harmonischer in der Erschütterungsfunktion als nicht wesentlich erwiesen hat, ist ein etwaiger Federaufzugsfehler von bestimmendem Einfluß auf den stabilen Einsatzbereich des Gerätes und den Verlauf der Auswanderung. Einige Versuchsreihen bestätigen diese wesentliche Abhängigkeit der Auswanderungserscheinung von den etwa vorhandenen Einbauungenauigkeiten der Feder auch experimentell.

Aus dem Institut für Mechanische Schwingungstechnik der Technischen Hochschule Karlsruhe
(Eingegangen am 28. März 1957.)
Anschrift des Verfassers: Priv.-Doz. Dr. *F. Weidenhammer*, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, Bau 40

Die Berechnung offener Rahmentragwerke nach dem Reduktionsverfahren

Von S. Falk

1. Einleitung. Die vorliegende Arbeit stellt die Fortsetzung und Verallgemeinerung meines ersten Aufsatzes[1] dar und behandelt offene, aus lauter geraden Stücken zusammengesetzte Rahmentragwerke. Solche offenen Rahmen lassen sich durch einen einfachen Kunstgriff stets auf einen oder mehrere Durchlaufträger zurückführen, und es zeigt sich, daß bei ebenen (räumlichen) Tragwerken höchstens drei (sechs) lineare Gleichungen aufzulösen sind, unabhängig von der statischen oder geometrischen Unbestimmtheit und der sonstigen Beschaffenheit des Tragwerkes. An drei Beispielen wird das Verfahren vorgeführt. Formeln aus meiner ersten Arbeit werden mit dem Buchstaben I zitiert.

2. Der Begriff der Reduktion. Gegeben sei ein im Endpunkt E eingespannter starrer Träger nach Abb. 1. In jedem beliebigen Schnittpunkt S läßt sich die im Bereich $A\,S$ angreifende gegebene Belastung reduzieren auf eine Kräftesumme $\mathfrak{R}_S$ und eine Momentensumme $\mathfrak{M}_S$. Beide Vektoren zerlegen wir in Tangentenrichtung (Längskraft und Drillmoment) und in zwei zueinander senk-

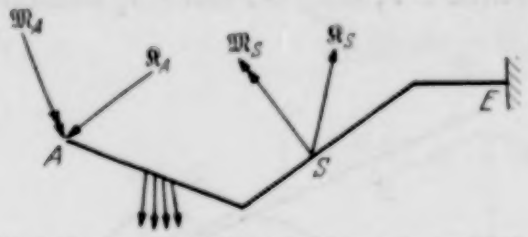


Abb. 1. Starrer durchlaufender Rahmen mit Kraftgrößen.

Abb. 2. Gerader Balken mit Kraftgrößen.

rechte Normalrichtungen (Querkräfte und Biegemomente). Diese sechs Komponenten werden vom Balkenteil $A\,S$ auf den Teil $S\,E$ übertragen; wir nennen sie die Kraftgrößen im Schnitt S. Die Reduktion der Kraftgrößen gelingt, weil die Vektoren $\mathfrak{R}_A$ und $\mathfrak{M}_A$ im Anfangspunkt A gegeben sind; man braucht ja, in A beginnend, nur nach den Gleichgewichtsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R}_i &= \mathfrak{R}_{i-1} + \tilde{\mathfrak{R}} \\ \mathfrak{M}_i &= \mathfrak{M}_{i-1} + \tilde{\mathfrak{M}} - l_i\,\mathfrak{t}_i \times \mathfrak{R}_{i-1} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

fortzuschreiten (Abb. 2).

Nun sei der Träger elastisch verformbar. Dann treten zu den sechs Kraftgrößen noch sechs Deformationsgrößen hinzu, die diesen paarweise zugeordnet, „konjugiert" sind, und zwar handelt es sich um die folgenden sechs Paare:

$$\left.\begin{aligned} &x\text{-Richtung}\begin{cases}\text{Längsverschiebung} & u\,,\\ \text{Längskraft} & L\,,\\ \text{Längsverdrehung (Drillung)} & \vartheta\,,\\ \text{Längsmoment (Drillmoment)} & T\,,\end{cases}\\ &y\text{-Richtung}\begin{cases}\text{Querverschiebung (Durchbiegung)} & v\,,\\ \text{Querkraft} & Q_y\,,\\ \text{Drehwinkel (Neigung)} & \varphi\,,\\ \text{Biegemoment} & M_y\,,\end{cases}\\ &z\text{-Richtung}\begin{cases}\text{Querverschiebung (Durchbiegung)} & w\,,\\ \text{Querkraft} & Q_z\,,\\ \text{Drehwinkel (Neigung)} & \psi\,,\\ \text{Biegemoment} & M_z\,.\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Vorzeichen sind nach Abb. 3 gewählt. Die Kraftgrößen bezeichnen wir allgemein mit k_i, die Deformationsgrößen mit d_i. Wenn eine Unterscheidung nicht nottut, schreiben wir einfach g_i.

[1] *S. Falk*, Ing.-Arch. 24 (1956) S. 216.

Den Begriff der Reduktion erweitern wir jetzt sinngemäß auf alle 12 Größen (2): zu den sechs statischen Gleichungen (1) gesellen sich ja noch sechs geometrische, die mit jenen durch das *Hooke*sche Gesetz verknüpft sind, und diese insgesamt zwölf Gleichungen geben eindeutig an, wie die zwölf Größen g_i von Punkt zu Punkt zu reduzieren sind. Allerdings — und das ist eine einschneidende Voraussetzung — müßten sämtliche Kraft- und Deformationsgrößen im Anfangspunkt A gegeben sein, was in Wirklichkeit nie der Fall ist. Die Kernfrage des Reduktionsverfahrens lautet demnach: wie findet man die Kraft- und Deformationsgrößen im Anfangspunkt A eines Balkens? Ihre Beantwortung stellen wir fürs erste zurück.

3. Die grundlegenden Differentialgleichungen. Die Größen (2) sind bekanntlich durch 12 lineare Differentialgleichungen erster Ordnung verknüpft, die sich zu den folgenden vier Differentialgleichungen zusammenfassen lassen:

$$\left.\begin{aligned} -[E\,F(x)\,u'(x)]' &= p(x)\,,\\ [E\,J_y(x)\,w''(x)]'' &= q_z(x)\,,\\ -[G\,I(x)\,\vartheta'(x)]' &= t(x)\,,\\ [E\,J_z(x)\,v''(x)]'' &= q_y(x)\,, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wobei Striche Ableitungen nach x bedeuten.

Hier stehen auf den rechten Seiten die gegebenen Belastungsfunktionen $p(x)$, $q_z(x)$, $t(x)$ und $q_y(x)$. Wir wollen vorerst annehmen, y und z seien die über den ganzen Integrationsbereich konstanten Hauptträgheitsrichtungen, auch mögen die Steifigkeiten EF, EJ_y, GI und EJ_z konstant

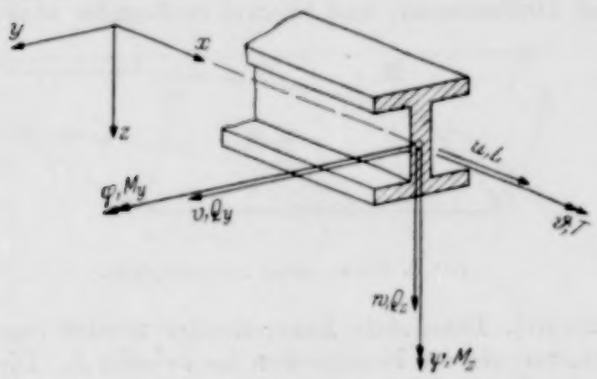


Abb. 3. Vorzeichen der Kraft- und Deformationsgrößen.

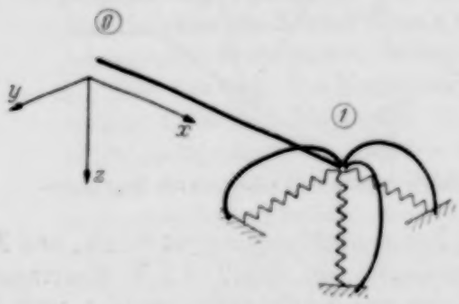


Abb. 4. Gerader Balken mit Druck- und Drehfedern.

sein (Voraussetzungen, von denen wir uns später wieder befreien werden); dann nämlich lassen sich die Lösungen von (3) unmittelbar hinschreiben. Als Integrationskonstanten wählen wir die Kraft- und Deformationsgrößen an der Stelle $x = 0$ [vgl. I(2) bis I(9)].

Weiter sei im Punkt 1 des Balkens ($x = l$) eine Anzahl von Druck- und Drehfedern angebracht (Abb. 4); die von diesen auf den Balken übertragenen Kraftgrößen sind nach dem *Hooke*schen Gesetz

$$k_i = -c_i\,d_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)\,, \tag{4}$$

wo die k_i zu den d_i konjugiert sind. Diese Federreaktionen müssen wir noch zu der im Bereich $0 \leqq x \leqq l$ angreifenden Belastung hinzuschlagen und haben damit den für das Reduktionsverfahren grundlegenden Zusammenhang zwischen den Kraft- und Deformationsgrößen an zwei Schnitten 0 und 1 (genauer gesagt unmittelbar rechts davon) in der Entfernung l voneinander

$$\left.\begin{aligned} u(l) = u_1 &= u_0 - \frac{l}{E\,F}\,L_0 + u(l)\,,\\ L(l) = L_1 &= \qquad L_0 + \tilde{L}(l) - c_u\,u_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{mit} \quad \left\{\begin{aligned} \int_0^x p(\xi)\,d\xi &= \tilde{L}(x)\,,\\ -\int_0^x \frac{\tilde{L}(\xi)}{E\,F}\,d\xi &= \tilde{u}(x), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} w(l) = w_1 &= w_0 - l\,\varphi_0 + \frac{l^2}{2\,E\,J_y}\,M_{y0} + \frac{l^3}{6\,E\,J_y}\,Q_{z0} + \tilde{w}(l)\,,\\ \varphi(l) = \varphi_1 &= \qquad \varphi_0 - \frac{l}{E\,J_y}\,M_{y0} - \frac{l^2}{2\,E\,J_y}\,Q_{z0} + \tilde{\varphi}(l)\,,\\ M_y(l) = M_{y1} &= \qquad\qquad M_{y0} + \quad l\cdot Q_{z0} + \tilde{M}_y(l) - C_\varphi\,\varphi_1\,,\\ Q_z(l) = Q_{z1} &= \qquad\qquad\qquad Q_{z0} + \tilde{Q}_z(l) \quad - c_w\,w_1 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \int_0^x q_z(\xi)\,d\xi &= \tilde{Q}_z(x), & \int_0^x Q_z(\xi)\,d\xi &= \tilde{M}_y(x), \\ \int_0^x \frac{\tilde{M}_y(\xi)}{E\,J_y}\,d\xi &= -\tilde{\varphi}(x), & \int_0^x \frac{-\tilde{\varphi}(\xi)}{E\,J_y}\,d\xi &= \tilde{w}(x), \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \vartheta(l) = \vartheta_1 &= \vartheta_0 - \frac{l}{G\,I}\,T_0 + \tilde{\vartheta}(l), \\ T(l) = T_1 &= T_0 + \tilde{T}(l) - C_\vartheta\,\vartheta_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{mit} \quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^x t(\xi)\,d\xi = \tilde{T}(x), \\ &-\int_0^x \frac{\tilde{T}(\xi)}{G\,I}\,d\xi = \tilde{\vartheta}(x), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} v(l) = v_1 &= v_0 + l\,\varphi_0 - \frac{l^2}{2\,E\,J_z}\,M_{z0} + \frac{l^3}{6\,E\,J_z}\,Q_{y0} + \tilde{v}(l), \\ \varphi(l) = \varphi_1 &= \varphi_0 - \frac{l}{E\,J_z}\,M_{z0} + \frac{l^2}{2\,E\,J_z}\,Q_{y0} + \tilde{\varphi}(l), \\ M_z(l) = M_{z1} &= M_{z0} - l\,Q_{y0} + \tilde{M}_z(l) - C_\varphi\,\varphi_1, \\ Q_y(l) = Q_{y1} &= Q_{y0} + \tilde{Q}_y(l) - c_v\,v_1 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \int_0^x q_y(\xi)\,d\xi &= \tilde{Q}_y(x), & \int_0^x \tilde{Q}_y(\xi)\,d\xi &= -\tilde{M}_z(x), \\ \int_0^x \frac{-\tilde{M}_z(\xi)}{E\,J_z}\,d\xi &= \tilde{\varphi}(x), & \int_0^x \frac{\tilde{\varphi}(\xi)}{E\,J_z}\,d\xi &= \tilde{v}(x). \end{aligned}\right\}$$

4. Die Leitmatrizen. Nun schreiben wir die Gleichungen (5) bis (8) noch einmal in Matrizen hin und bekommen, wenn wir, um allgemeiner zu bleiben, die Zeiger 0 und 1 durch $i-1$ und i ersetzen, ferner aus formalen Gründen die triviale Gleichung $1 = 1$ zu jedem der vier Gleichungssysteme hinzufügen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u}_i &= \mathfrak{L}_{u\,i}\,\mathfrak{u}_{i-1}, \\ \mathfrak{y}_i &= \mathfrak{L}_{y\,i}\,\mathfrak{y}_{i-1}, \\ \mathfrak{t}_i &= \mathfrak{L}_{t\,i}\,\mathfrak{t}_{i-1}, \\ \mathfrak{z}_i &= \mathfrak{L}_{z\,i}\,\mathfrak{z}_{i-1}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die vier sogenannten „Leitmatrizen" mit ihren zugehörigen Vektoren sind dabei der Reihe nach

$$\mathfrak{L}_u = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -l/E\,F & \tilde{u} & 0 \\ 0 & 1 & \tilde{L} & -c_u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \qquad \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} u \\ L \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

$$\mathfrak{L}_y = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -l & -l^2/2\,E\,J_y & l^3/6\,E\,J_y & \tilde{w} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l/E\,J_y & -l^2/2\,E\,J_y & \tilde{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & \tilde{M}_y & 0 & -C_\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{Q}_z & -c_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \mathfrak{y} = \begin{pmatrix} w \\ \varphi \\ M_y \\ Q_z \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\mathfrak{L}_t = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -l/G\,I & \tilde{\vartheta} & 0 \\ 0 & 1 & \tilde{T} & -C_\vartheta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \qquad \mathfrak{t} = \begin{pmatrix} \vartheta \\ T \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\mathfrak{L}_z = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & l & -l^2/2\,E\,J_z & l^3/6\,E\,J_z & \tilde{v} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l/E\,J_z & l^2/2\,E\,J_z & \tilde{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l & \tilde{M}_z & 0 & -C_\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{Q}_y & -c_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \mathfrak{z} = \begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ M_z \\ Q_y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Die von der gegebenen Belastung herrührenden, mit dem Zeichen $\sim$ versehenen „Lastgrößen" sind für die praktisch wichtigsten Fälle in den Tabellen 1 und I (1) zusammengestellt.

Aus den Matrizen (10) bis (13) lassen sich nun leicht Leitmatrizen höherer Ordnung zusammenstellen, zum Beispiel für den Sonderfall der ebenen Statik (Biegen in der (z, x)-Ebene mit Längsdehnung in x-Richtung)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l/EF & \tilde{u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l & l^2/2\,EJ_y & l^3/6\,EJ_y & 0 & \tilde{w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l/EJ_y & -l^2/2\,EJ_y & 0 & \tilde{\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l & 0 & \tilde{M}_y & 0 & 0 & -C_\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \tilde{Q}_z & 0 & -c_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{L} & -c_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ w \\ \varphi \\ M_y \\ Q_z \\ L \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

oder ganz allgemein: sind ϱ Paare an der Deformation des Balkens beteiligt, so kann man diese gemeinsam mit der Ziffer 1 zu einem Vektor zusammenfassen und aus den Matrizen (10) bis (13) die zugehörige Leitmatrix mit $2\,\varrho + 1$ Zeilen und $3\,\varrho + 1$ Spalten ohne Schwierigkeiten zusammenbauen. Alle diese Leitmatrizen sind offensichtlich von der folgenden typischen Form:

$$\mathfrak{L} = \left(\begin{array}{ccc:c} & & & \tilde{d}_1 \\ & \mathfrak{G} & \mathfrak{F} & \vdots \\ & & & \tilde{d}_\varrho \\ \hdashline & & & \tilde{k}_\varrho \\ & \mathfrak{O} & \mathfrak{R} & \vdots \\ & & & \tilde{k}_1 \\ \hdashline 0\,..\,0 & 0\,..\,0 & 1 & 0\,..\,0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c} \mathfrak{d} \\ \hdashline \mathfrak{k} \\ \\ 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_\varrho \\ k_\varrho \\ \vdots \\ k_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{x}, \tag{15}$$

oder noch einmal ausführlich in Untermatrizen der Ordnung ϱ geschrieben ($\mathfrak{O}$ ist die Nullmatrix):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G}\,\mathfrak{d}_{i-1} + \mathfrak{F}\,\mathfrak{k}_{i-1} &= (\mathfrak{d} - \tilde{\mathfrak{d}})_i\,, \\ \mathfrak{R}\,\mathfrak{k}_{i-1} + \mathfrak{C}\,(\mathfrak{d} - \tilde{\mathfrak{d}})_i &= (\mathfrak{k} - \tilde{\mathfrak{k}})_i\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Jede dieser Untermatrizen enthält eine gewisse Gruppe von Kenngrößen, und zwar gilt folgende Zuordnung:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{G} \to \text{Geometrie}\,, && \mathfrak{R} \to \text{Kräftegeometrie}\,, \\ &\mathfrak{F} \to \text{Steifigkeit des Balkens}\,, && \mathfrak{C} \to \text{Federung von außen}\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

In $\mathfrak{R}$ finden wir ϱ der Gleichungen (1) wieder; $\mathfrak{F}$ verschwindet, wenn die Steifigkeiten unendlich groß werden (starrer Balken), $\mathfrak{C}$, wenn die äußeren Federn fehlen. Den punktiert (gestrichelt) eingerahmten Teil von $\mathfrak{L}$ wollen wir den Kern (den Hauptteil) der Leitmatrix nennen. Die letzte Zeile heißt (aus später verständlichen Gründen) die Kontrollzeile, die die gegebenen Lastgrößen enthaltende Spalte die Lastspalte. Die Determinanten der Kerne und Hauptteile aller Leitmatrizen haben offenbar den Wert 1. Die Reziproken der Kerne entstehen, wie man leicht zeigt, wenn man x durch $-x$ bzw. l durch $-l$ ersetzt.

Die Matrizen (11) und (13) lassen sich übrigens noch um die Ordnung zwei erniedrigen, wenn man irgendeine Größe g_i mit Hilfe ihrer Konjugierten, die dann in der Lastspalte erscheint, eliminiert. So entsteht zum Beispiel, wenn man in (11) die Querkräfte entfernt, die folgende Leitmatrix, die im wesentlichen den gesamten Formelapparat der Traversenmethode von *Stewart*[1] enthält:

$$\mathfrak{L}_{fi} = \left(\begin{array}{ccc:c} -2 & l/2\,EJ_y & \tilde{\bar{\varphi}} + 3\,(w_i - w_{i-1})/l & 0 \\ 6\,EJ_y/l & -2 & \tilde{\tilde{M}}_y - 6\,EJ_y\,(w_i - w_{i-1})/l^2 & -C_\varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \qquad \mathfrak{f} = \begin{pmatrix} \varphi \\ M_y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

mit

$$\tilde{\bar{\varphi}} = \tilde{\varphi} + 3\,\tilde{w}/l\,, \qquad \tilde{\tilde{M}}_y = \tilde{M}_y - 6\,EJ_y\,\tilde{w}/l^2\,. \tag{19}$$

[1] *R. W. Stewart* und *A. Kleinlogel*, Die Traversenmethode, Berlin 1952.

Solche, an der Deformation des Balkens zwar beteiligten, aber aus dem Kern der Leitmatrix entfernten Paare nennen wir „unterdrückt". Falls von Interesse, lassen sich die unterdrückten Größen nachträglich leicht wiedergewinnen; zum Beispiel findet man aus (11) für die Querkräfte Q_{i-1} und Q_i, wenn man der Übersichtlichkeit halber die Indizes z und y bei Q und M fortläßt

$$Q_{i-1} = Q_i - \widetilde{Q}_i = \frac{1}{l_i}(M_i - \widetilde{M}_i - M_{i-1}), \tag{20}$$

ferner für die Durchbiegung w als Funktion von x im ersten Feld

$$w(x) = -x\left(1 - \frac{x}{l}\right)\left[\left(1 + \frac{x}{l}\right)q_0 + \frac{x}{2EJ}M_0\right] + \left[\widetilde{w}(x) - \frac{x^3}{l^3}\widetilde{w}(l) + w_0 + (w_1 - w_0)\frac{x^3}{l^3}\right] \tag{21}$$

und entsprechend in allen anderen Feldern.

Schließlich fügen wir noch eine Bemerkung zu der Matrizenmultiplikation

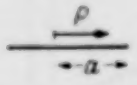
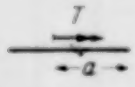
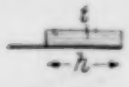
$$\mathfrak{x}_i = \mathfrak{L}_i \mathfrak{x}_{i-1} \tag{22}$$

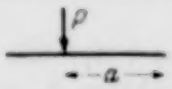
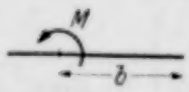
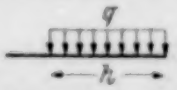
ein. Die Leitmatrix $\mathfrak{L}_i$ hat $3\varrho + 1$ Spalten, aber der Vektor $\mathfrak{x}_{i-1}$ nur $2\varrho + 1$ Komponenten; man faßt daher die ersten ϱ Komponenten von $\mathfrak{x}_i$ als die letzten ϱ des Vektors $\mathfrak{x}_{i-1}$ auf und multipliziert sodann wie gewöhnlich. Eine solche Matrizenmultiplikation nennen wir „verschränkt". Zwar könnte man die Gleichung (22) auch auflösen in die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{x}_i^* = \mathfrak{H}_i \mathfrak{x}_{i-1}, \qquad \mathfrak{x}_i = \mathfrak{U}_i \mathfrak{x}_i^* \tag{23}$$

mit dem quadratischen Hauptteil $\mathfrak{H}_i$ und der ebenfalls quadratischen „Übergangsmatrix" $\mathfrak{U}_i$ [I (13) in sinngemäßer Erweiterung], was aber nur unnötige Schreib- und Rechenarbeit verursachen würde.

Tabelle 1. *Lastgrößen für Längsdehnung, Drillen und Biegen mit unterdrücktem Q, w*

①			②		
$\tilde{u}(l)$	$-Pa/EF$	$-ph^2/2EF$	$\tilde{\vartheta}(l)$	$-Ta/GI$	$-th^2/2GI$
$\widetilde{L}(l)$	P	ph	$\widetilde{T}(l)$	T	th

③			
$\tilde{\tilde{q}}(l)$	$\frac{-Pa^2}{2EJ}\cdot\left(1-\frac{a}{l}\right)$	$-\frac{Mb}{EJ}\cdot\left(1-\frac{3b}{2l}\right)$	$-qh^3/24EJ$
$\widetilde{\widetilde{M}}(l)$	$Pa\left(1-\frac{a^2}{l^2}\right)$	$M\left(1-3\frac{b^2}{l^2}\right)$	$qh^2/4$

5. Der durchlaufende Träger. Der geradlinige Abschnitt zwischen zwei benachbarten Feldgrenzen heißt das Feld der Nummer i. Ein Punkt F ist Feldgrenze, wenn für ihn mindestens eine der folgenden Eigenschaften zutrifft:

1) In F tritt eine Federreaktion nach (4) hinzu. (24)

2) Für z der Kraft- oder Deformationsgrößen sind in F feste Werte vorgeschrieben (z. B. die Werte Null), oder allgemeiner: zwischen den Kraft- und Deformationsgrößen im Punkte F sollen z lineare Bedingungen erfüllt sein. (25)

3) F ist ein Verzweigungspunkt. (26)

4) F ist ein Knickpunkt. (27)

Demnach stellt also auch jedes freie oder irgendwie gegen die feste Umgebung gestützte Ende eines Trägers eine Feldgrenze dar. Mitunter kann es zweckmäßig sein, auch andere Punkte zu Feldgrenzen zu erklären, etwa Punkte, in denen die Steifigkeitsfunktion unstetig ist (abgesetzte Wellen und dergleichen).

Für einen durchlaufenden Träger mit n Feldern (Abb. 5) gilt nun nach (9), (15) usw. der Reihe nach

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{x}_0 , \qquad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{x}_1 , \ldots , \mathfrak{x}_n = \mathfrak{Q}_n \mathfrak{x}_{n-1} \tag{28}$$

oder eingesetzt

$$\mathfrak{x}_n = \underbrace{\mathfrak{Q}_n \mathfrak{Q}_{n-1} \cdots \mathfrak{Q}_1}_{\mathfrak{P}_n} \mathfrak{x}_0 . \tag{29}$$

$$\mathfrak{x}_n = \mathfrak{P}_n \mathfrak{x}_0 \tag{30}$$

Sind nun an der Deformation ϱ Paare beteiligt, so müssen in den Endpunkten A und E auch genau je ϱ Randbedingungen der Form

$$g_{0\nu} = 0 \; (\nu = 1, 2, \ldots \varrho) , \tag{31}$$

$$g_{n\mu} = 0 \; (\mu = 1, 2, \ldots \varrho) \tag{32}$$

(bzw. Linearkombinationen dieser Gleichungen) befriedigt werden, und zwar muß in A wie in E aus jedem Paar gerade eine Größe g verschwinden. Die in A verbleibenden ϱ wollen wir die „Freigrößen" $(A_1, A_2, \ldots A_\varrho) = \mathfrak{a}$ und die in E verschwindenden die „Nullgrößen" $(B_1, B_2 \ldots B_\varrho) = \mathfrak{b}$ nennen. Aus (30) und (32) entsteht dann das lineare inhomogene Gleichungssystem

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{a} + \mathfrak{r} = \mathfrak{b} = 0 . \tag{33}$$

Damit haben wir die Kernfrage des Reduktionsverfahrens (Ziff. 2) für den Durchlaufträger — und wie wir sehen werden, im Prinzip bereits für jedes beliebige Tragwerk — beantwortet: Von den 2ϱ Kraft- und Deformationsgrößen im Anfangspunkt A eines durchlaufenden Trägers sind ϱ gleich Null; die übrigen ϱ gewinnt man aus dem linearen Gleichungssystem (33).

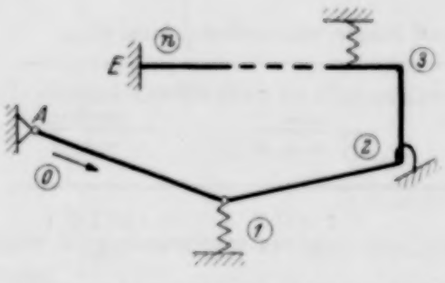


Abb. 5. Durchlaufender Rahmen, schematisch.

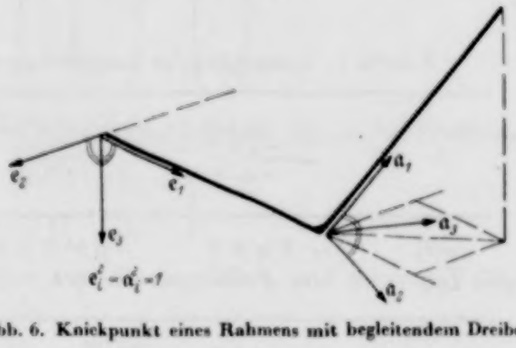


Abb. 6. Knickpunkt eines Rahmens mit begleitendem Dreibein.

Den praktischen Hergang der Rechnung zeigt das Schema (34): Die mit den Freigrößen A_i und der Ziffer 1 multiplizierten $\varrho + 1$ Spalten des Anfangsvektors $\mathfrak{x}_0$ werden unabhängig voneinander an sämtlichen Leitmatrizen vorbeimultipliziert bis unten rechts neben $\mathfrak{Q}_n$ die ϱ Nullgrößen B_i erscheinen. Dann wird des Gleichungssystem (33) der Ordnung ϱ gelöst und mit dem nun bekannten Anfangsvektor $\mathfrak{x}_0$ die Rechnung wiederholt, wobei die Kraft- und Deformationsgrößen unmittelbar rechts von jeder Feldgrenze zahlenmäßig erscheinen. Nach (5) bis (8) sind dann auch Kraft- und Deformationsgrößen als Funktionen der Balkenkoordinate x bekannt, womit die gestellte Aufgabe erschöpfend gelöst ist.

$$\begin{array}{l} \\ \mathfrak{x}_0 = \\ (\mathfrak{Q}_1) \\ (\mathfrak{Q}_n) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & \ldots & A_\varrho & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \end{pmatrix} = \mathfrak{b} = 0 . \end{array} \tag{34}$$

Sind alle Feldgrenzen vom Typ (24), so sind die Elemente sämtlicher Leitmatrizen von vornherein gegeben und die Rechnung bereitet nach (28) und (34) keine Schwierigkeiten. Zwischenbedingungen nach (25) kann man auf drei verschiedene Arten erfüllen: durch Ablösen der Freigrößen, das abgekürzte und das erweiterte Verfahren [I (8)]. Bei abgewinkelten Trägern schließlich (Abb. 6) transformieren sich die Größen (u, v, w) und ebenso (L, Q_y, Q_z), $(\vartheta, \psi, \varphi)$, (T, M_y, M_z) mit Hilfe

der Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{e}_1 \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{e}_2 \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{e}_3 \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{e}_1 \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{e}_2 \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{e}_3 \mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{e}_1 \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{e}_2 \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{e}_3 \mathfrak{a}_3 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Je nach Art und Zahl der beteiligten Paare werden zweimal ϱ Elemente dieser Matrix zu einer Gesamttransformationsmatrix $\mathfrak{T}$ zusammengefaßt; es gilt dann beim Übergang an einer Knickstelle i

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}_i &= \mathfrak{Q}_i \mathfrak{x}_{i-1}, \\ \mathfrak{x}_{i+1} &= \mathfrak{Q}_{i+1} \mathfrak{T}_{i+1} \quad \mathfrak{x}_i = \mathfrak{Q}^*_{i+1} \mathfrak{x}_i, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

und zwar empfiehlt es sich, von vornherein die Kerne der Leitmatrizen von rechts mit $\mathfrak{T}$ zu multiplizieren.

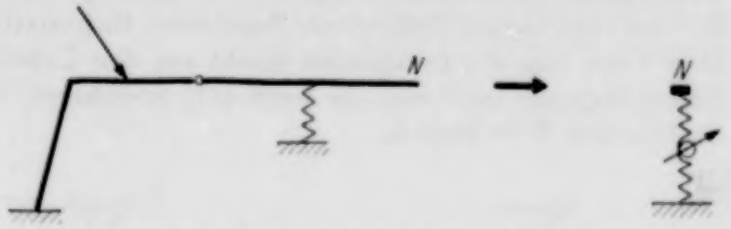


Abb. 7. Ersatz eines durchlaufenden Rahmens durch eine Koppelfeder.

6. Federmatrizen. Wir fragen jetzt, wie die ϱ Kraftgrößen mit den ϱ Deformationsgrößen in einem beliebigen Schnitt N eines Durchlaufträgers zusammenhängen (Abb. 7). Rechnen wir den Träger bis zum Punkt N durch, so erscheint unten rechts in (34) folgendes Zahlenschema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} A_1 & A_2 & \dots & A_\varrho & 1 \\ \hline \left.\begin{matrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{matrix}\right) & \Re & & & \left.\begin{matrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \dots \\ \bar{d}_\varrho \end{matrix}\right) \\ \hline \left.\begin{matrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right) & \mathfrak{S} & & & \left.\begin{matrix} \bar{k}_\varrho \\ \dots \\ \bar{k}_2 \\ \bar{k}_1 \\ 1 \end{matrix}\right) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_\varrho \\ \hline k_\varrho \\ \dots \\ k_2 \\ k_1 \\ 1 \end{array}\right)_N = \mathfrak{x}_N . \tag{37}$$

Mit den ϱ-reihigen Matrizen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ und den Vektoren

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a} &= (A_1, A_2, \dots . A_\varrho), \\ \mathfrak{d} &= (d_1, d_2, \dots . d_\varrho), \\ \mathfrak{k} &= (k_\varrho, k_{\varrho-1}, \dots . k_1) \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

können wir dafür kürzer schreiben

$$\mathfrak{R}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{d} - \bar{\mathfrak{d}}, \qquad \mathfrak{S}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{k} - \bar{\mathfrak{k}} \tag{39}$$

und weiter, da $\mathfrak{R}$ stets regulär ist,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{R}^{-1} (\mathfrak{d} - \bar{\mathfrak{d}}), \tag{40}$$

$$\mathfrak{k} - \bar{\mathfrak{k}} = \mathfrak{S}\,\mathfrak{R}^{-1} (\mathfrak{d} - \bar{\mathfrak{d}}) = \mathfrak{C} (\mathfrak{d} - \bar{\mathfrak{d}}). \tag{41}$$

Die überstrichenen Größen stammen aus der gegebenen Belastung; besteht der Träger aus einem einzigen Feld, so stimmen sie natürlich mit den Lastgrößen der Tabellen 1 und I (1) überein. Die Matrix

$$\mathfrak{S}\,\mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{C} = \begin{vmatrix} c_{1\varrho} & \dots & c_{12} & c_{11} \\ c_{2\varrho} & \dots & c_{22} & c_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{\varrho\varrho} & \dots & c_{2\varrho} & c_{1\varrho} \end{vmatrix} \quad (c_{ii} \leqq 0) \tag{42}$$

heißt die Federmatrix des Rahmenschnittes N, ihre Reziproke $\mathfrak{C}^{-1}$, falls vorhanden, die Einflußmatrix. Nach dem Satz von *Maxwell-Betti* ist die Federmatrix, wie in (42) bereits ausgedrückt, symmetrisch zur Nebendiagonale; die Elemente c_{ii} sind negativ oder gleich Null. Diese Federmatrix stellt die natürliche Verallgemeinerung der Matrix $\mathfrak{C}$ in (15) dar. Dort waren noch alle ϱ Gleichungen nach (4) entkoppelt. Wollten wir hier aber die elastische Wirkung des abgeschnittenen Rahmenteiles im Punkte N durch eine einzige Feder ersetzen, so müßte diese die Matrix (42) haben, ließe sich also nicht einfach aus Druck- und Drehfedern wie in Abb. 4 zusammensetzen,

sondern erst verwirklichen durch ein komplizierteres (gedachtes) Gebilde, das wir als Koppelfeder bezeichnen und nach Abb. 7 symbolisieren wollen. Die auf den Punkt N von der Feder übertragenen Anteile der gegebenen Belastung deutet ein Pfeil an; wir lassen ihn fort, wenn sämtliche überstrichenen Größen in (37) verschwinden.

Da nun gewisse Bauelemente der Praxis immer wieder vorkommen, lohnt es sich, Kataloge von Koppelfedern zusammenzustellen. So zeigt die Tabelle 2 Federmatrizen nebst Kehrmatrizrn $\mathfrak{R}^{-1}$ am einfeldrigen Balken mit konstanter Biegesteifigkeit EJ_y für die Paare (M_y, φ) und (Q_z, w). Hier kann man die Lastgrößen direkt aus den Tabellen 1 bzw. I.1 übernehmen; in allen anderen Fällen dagegen muß man sie nach (37) berechnen, da das Katalogisieren von Lastgrößen kaum praktischen Wert besitzt.

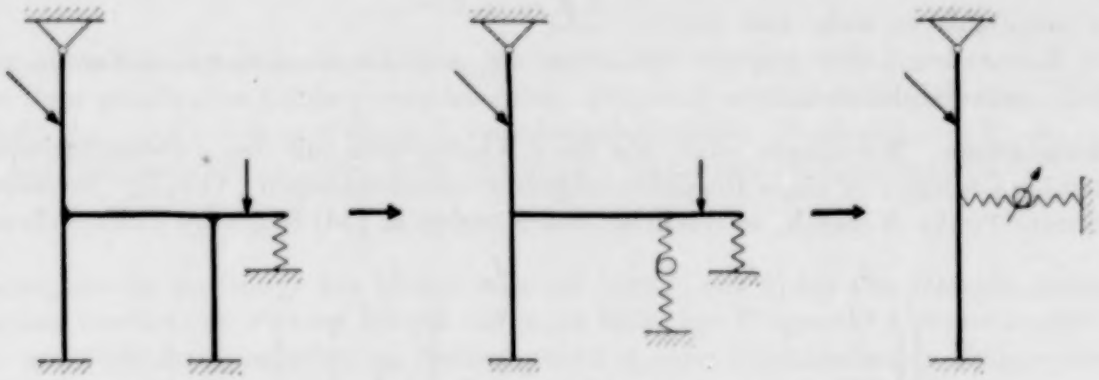


Abb. 8. Zurückführung eines mehrfach verzweigten Rahmens auf einen Durchlaufträger.

7. Das Anfedern von Rahmenteilen. Jetzt sind wir in der Lage, einen beliebigen offenen Rahmen auf eine Anzahl von Durchlaufträgern zurückzuführen: wir erklären irgendeinen durchlaufenden Linienzug des Tragwerkes zum Hauptträger, schneiden sämtliche Seitenzweige ab, ersetzen sie in den Schnittpunkten durch ihre Koppelfedern, deren Matrizen in (15) unten rechts einzutragen sind, und können nun den Hauptträger wie üblich berechnen. Dann aber liegen nach (40) auch die Freigrößen der Seitenzweige fest, womit die Aufgabe gelöst ist. Auch bei mehrfachen Verzweigungen nach Abb. 8 kommt man stets zum Ziel. Bei schiefwinkligen Anschlüssen sind Kraft- und Deformationsgrößen in die Richtungen des Hauptträgers zu zerlegen.

8. Anfedern mit Nebenbedingungen. Bei biegesteifen Anschlüssen sind die Deformationsgrößen des abgeschnittenen Zweiges gleich denen des Hauptträgers, so daß die in diesen eingeleiteten Kraftgrößen als linke Seiten von (41) unmittelbar gegeben sind. Sollen aber z $(1 \leqq z \leqq \varrho)$ der Kraftgrößen fest vorgeschriebene Werte annehmen (etwa die Werte Null wie in den Anschlüssen der Abb. 9), so werden für den Hauptträger auch gerade die z konjugierten Deformationsgrößen des Seitenzweiges bedeutungslos; diese eliminieren wir daher in den Gleichungen (41) mit Hilfe geeigneter Zeilenkombinationen, wodurch eine um die Ordnung z erniedrigte, ebenfalls nebensymmetrische „reduzierte" Federmatrix entsteht. Ähnlich geht man vor, wenn z lineare Bedin-

Tabelle 2. *Federmatrizen für einfeldrige Balken mit konstanter Biegesteifigkeit EJ, Länge l*

Art der Stützung $\overset{\frown}{\varphi_e, M_e} \downarrow w_e, Q_e$	$(\mathfrak{k} - \bar{\mathfrak{k}})_e = \mathfrak{C}\,(\mathfrak{d} - \bar{\mathfrak{d}})_e$ Federmatrix $\mathfrak{C}$	$c_a = \mathfrak{R}^{-1}\,(\mathfrak{d} - \bar{\mathfrak{d}})_e$ Matrix $\mathfrak{R}^{-1}$	a_a Freie Konstanten
1a 1b	$EJ\begin{pmatrix} \mp 6/l^2 & -4/l \\ -12/l^3 & \mp 6/l^2 \end{pmatrix}$	$EJ\begin{pmatrix} \pm 6/l^2 & +2/l \\ -12/l^3 & \mp 6/l^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} M \\ Q \end{pmatrix}_a$
2a 2b	$EJ\begin{pmatrix} \mp 3/l^2 & -3/l \\ 3/l^3 & \mp 3/l^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mp 3/2\,l & -1/2 \\ -3\,EJ/l^3 & \mp 3\,EJ/l^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varphi \\ Q \end{pmatrix}_a$
3a 3b	$EJ\begin{pmatrix} 0 & -1/l \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +1 & \pm l/2 \\ 0 & -EJ/l \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} w \\ M \end{pmatrix}_a$
4a 4b	$\begin{pmatrix} 0 & -C \\ -c & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +1 & \pm l \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} w \\ \varphi \end{pmatrix}_a$

Die unteren Vorzeichen in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{R}^{-1}$ gelten für die Fälle *b)*

gungsgleichungen zwischen den Kraftgrößen oder noch allgemeiner z Gleichungen zwischen sämtlichen 2ϱ Kraft- und Deformationsgrößen vorgeschrieben sind; doch hat dieser Fall wohl nur theoretisches Interesse.

9. Die Addition (Parallelschaltung) von Koppelfedern. Die freien Enden von p Durchlaufträgern mögen im Punkte H biegesteif miteinander verbunden sein (Abb. 10). Dann gilt für diesen Punkt nach (41), wenn wir uns sämtliche Kraft- und Deformationsgrößen nach gemeinsamen Richtungen zerlegt denken,

$$\sum_{i=1}^{p} (\mathfrak{k} - \bar{\mathfrak{k}}_i) = \sum_{i=1}^{p} \mathfrak{C}_i (\mathfrak{d} - \bar{\mathfrak{d}}_i) \tag{43}$$

oder

$$\mathfrak{k}_H = \mathfrak{C}_s \mathfrak{d}_H + \bar{\mathfrak{k}}_s \tag{44}$$

mit

$$\mathfrak{C}_s = \sum \mathfrak{C}_i , \quad \bar{\mathfrak{k}}_s = \sum (\bar{\mathfrak{k}}_i - \mathfrak{C}_i \bar{\mathfrak{d}}_i) . \tag{45}$$

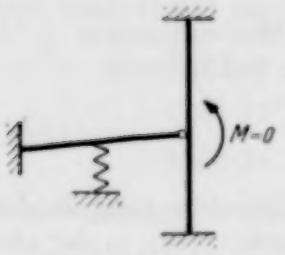
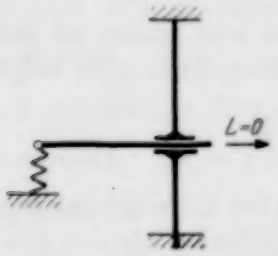


Abb. 9. Rahmenanschlüsse mit Nebenbedingungen.



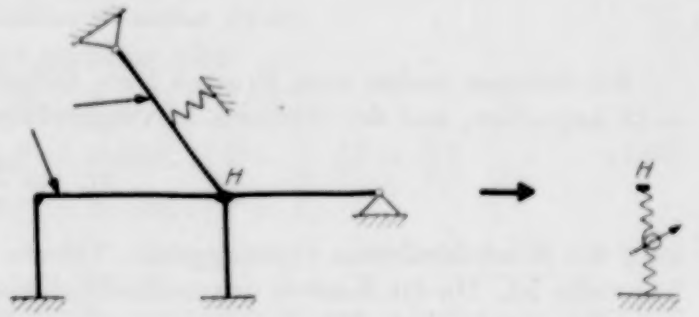


Abb. 10. Ersatz eines offenen Rahmens durch eine Koppelfeder.

Man kann daher den ganzen Rahmen der Abb. 10 durch eine einzige (belastete) Koppelfeder im Punkte H ersetzen, und zwar auch dann, wenn infolge Nebenbedingungen einige oder alle Federmatrizen reduziert sein sollten. Sind insbesondere alle p Zweige unbelastet, so wird einfach

$$\mathfrak{k}_H = (\sum \mathfrak{C}_i)\, \mathfrak{d}_H = \mathfrak{C}_s \mathfrak{d}_H . \tag{46}$$

Das heißt: die von der gewöhnlichen Druck- und Drehfeder her bekannte Tatsache, daß sich bei Parallelschaltungen die Federkonstanten addieren, überträgt sich auch auf die Federmatrizen. Läßt man jetzt in H gegebene Kraftgrößen $\bar{\mathfrak{k}}$ angreifen, so folgt aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\bar{\mathfrak{k}} + \mathfrak{C}_s \mathfrak{d}_H = 0 \tag{47}$$

sofort

$$\mathfrak{d}_H = -\mathfrak{C}_s^{-1} \bar{\mathfrak{k}} , \tag{48}$$

und damit ist nach (41) auch schon der ganze Rahmen berechnet: ein Vorgehen, das in diesem einfachen Falle stark an die Deformationsmethode erinnert. Auch dort werden ja die ϱ aus dem Zusammenhang eliminierten Deformationsgrößen d_{iH} aus ϱ linearen inhomogenen Gleichungen ermittelt.

10. Rahmen mit unverschieblichen Knoten. Sind die Knoten (Feldgrenzen) eines Tragwerkes unverschieblich, so kann man alle Kraft-Verschiebungspaare unterdrücken und allein mit den Momenten-Drehwinkel-Paaren rechnen. Bei ebenen Trägern hat man dann lediglich das Paar (M_y, φ) mit der Leitmatrix (18), in der die w_i verschwinden. Aus der Momentenlinie folgt der Querkraftverlauf durch Ableiten (20), die Biegelinie aus (21).

11. Praktische Durchführung und Beispiele. Das Einflechten der Federkonstanten nach I. (22) ist nun durch die verschränkte Matrizenmultiplikation überflüssig geworden. Um auch die Rechenproben mit in das Schema (34) einzubeziehen, addieren wir zur letzten Zeile der Leitmatix die negativen Summen der ersten 2ϱ Zeilen, so daß die Zeilensummen dieser neuen Matrix gleich Null bzw. Eins sind. Addiert man nun zur letzten Komponente des Vektors $\mathfrak{x}_i$ die Summe seiner ersten 2ϱ-Komponenten, so kommt bei richtiger Rechnung unten in jeder der homogenen, mit einer Freigröße multiplizierten Spalte eine Null, in der inhogenen (Last-) Spalte dagegen eine Eins heraus, gegebenenfalls bis auf vertretbare Abrundungsfehler, die zu streichen sind, denn weiterrechnen darf man natürlich nur mit den Zahlen 0 oder 1. Weitere willkommene Kontrollen stellen

die Bedingungen $c_{ii} \leqq 0$ und die Nebensymmetrie der Federmatrizen dar (42). Auch sollte man immer das Gleichgewicht am Tragwerk überprüfen.

Bei ebenen Tragwerken zeichnen wir positive Biegemomente nach oben auf (negative w, Q-Richtung); sie erscheinen dann auf der Zugseite des Balkens. Positive Längskräfte bedeuten Druck-, negative Zugkräfte.

a) Erstes Beispiel. Für ein offenes Tragwerk mit unverschieblichen Knoten (Abb. 11) ist die Einflußlinie für das Biegemoment M_{2r} unmittelbar rechts vom Pfosten 2 infolge einer wandernden Einzellast P zu berechnen.

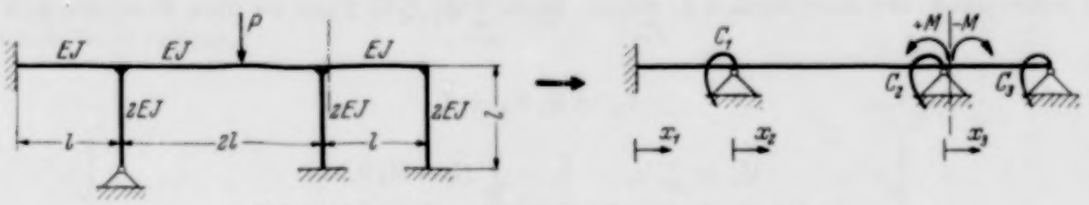


Abb. 11. Rahmen mit wandernder Einzellast, dazu Ersatzträger.

Wir bringen rechts vom Pfosten 2 ein Gelenk an und lassen an ihm ein Momentenpaar $+M$, $-M$ angreifen; aus der dadurch hervorgerufenen Biegelinie $w(x)$ folgt dann bekanntlich

$$M_{2r} = \frac{w(x)}{-\hat{\varphi}} P , \tag{1.01}$$

wo $\hat{\varphi}$ die Winkeldifferenz (Sprunggröße, Tabelle I,3) im Gelenk und $w(x)$ die Durchbiegung an der Laststelle ist. Da die Knoten unverschieblich sind, rechnen wir mit der Leitmatrix (18), in der alle $w_i = 0$ zu setzen sind. Mit

$$l^* = l , \quad P^* = \frac{2\,EJ}{l^2} \quad \text{d. h.} \quad l = 1 , \; EJ = \frac{1}{2} \tag{1.02}$$

werden die Drehfederkonstanten der Pfosten nach Tab. 2 (Elemente c_{11} rechts oben)

$$\left.\begin{aligned} &\text{Pfosten 1 (Fall 2a):} && C_1 = 3\,\frac{2\,EJ}{l} && = 3 , \\ &\text{Pfosten 2 und 3 (Fall 1a):} && C_2 = C_3 = 4\,\frac{2\,EJ}{l} && = 4 . \end{aligned}\right\} \tag{1.03}$$

Als äußere Belastung haben wir im Feld 2 das Moment $+M = P^* l^* = 1$ mit $b = 0$ und im Feld 3 das Moment $-M = -1$ mit $b = l = 1$ (Tabelle 1,3); in die Lastspalte des dritten Feldes ist außerdem die Sprunggröße $\hat{\varphi}$ aufzunehmen. Freigröße ist hier das Einspannmoment M_0. Damit läßt sich das Zahlenschema 1 hinschreiben; die Zeilensummen in den Leitmatrizen sind der Übersichtlichkeit wegen fortgelassen worden. Die Elemente rechts von $\mathfrak{L}_{f2}$ zum Beispiel finden wir so

$$(-2)\cdot(1) + (2)\cdot(-5) + 0 + 0\cdot(*) = -12 ,$$
$$(1{,}5)\cdot(1) + (-2)\cdot(-5) + 1\cdot 0 + (-4)\cdot(-12) = 59{,}5 .$$

Die Zwischenbedingung $M_2 = 0$ (Gerbergelenk!) übergehen wir zunächst, rechnen also nach dem erweiterten Verfahren I (8c). Aus den beiden eingerahmten Gleichungen ergibt sich dann zum Schluß

$$\left.\begin{aligned} M_2 &= \quad 59{,}5\,M_0 + \quad 1 \quad = 0 \to M_0 = -\frac{1}{59{,}5} = -0{,}0168 , \\ M_3 &= -489\,M_0 + 11\,\hat{\varphi} = 0 \to \quad \hat{\varphi} = \frac{489\,M_0}{11} = -0{,}7472 . \end{aligned}\right\} \tag{1.04}$$

Damit läßt sich nun die rechte (End-) Spalte des Schemas hinschreiben, womit Drehwinkel und Biegemomente für alle Feldgrenzen gegeben sind (Zahlenschema I).

Nach (21) sind jetzt die Biegelinien in allen drei Feldern wegen $w_i = 0$, $l = 1$,

$$\varphi_{2r} = \varphi_{21} + \hat{\varphi} = 0{,}2017 - 0{,}7472 = -0{,}5455 , \quad EJ = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{im Feld 1:} && w(x) = -x\,(1-x)\,[(1+x)\cdot 0 - x(-0{,}0168)] + 0 , \\ &\text{Feld 2:} && w(x) = -x\left(1-\frac{x}{2}\right)\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)(-0{,}0168) - x(0{,}0840)\right] + 0 , \\ &\text{Feld 3:} && w(x) = -x\,(1-x)\,[(1+x)\,(-0{,}5455) - x\cdot 0] + [(-1)\,x^2 - x^3(-1)\,1^2] . \end{aligned}\right\} \tag{1.05}$$

Zahlenschema 1

$$\begin{array}{lcccc} & & & M_0 & 1 \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}0168 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ M_0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathfrak{L}_{f1}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0{,}0168 \\ 0{,}0840 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ M_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathfrak{L}_{f2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ \boxed{59{,}5} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0{,}2017 \\ 0{,}0000 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ M_2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathfrak{L}_{f3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2\hat{\varphi}-1 & 0 \\ 3 & -2 & 3\varphi+2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 83{,}5 & -2\hat{\varphi} \\ \boxed{-489} & 11\hat{\varphi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0{,}0910 \\ 0{,}0000 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ M_3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Das nach (1.01) durch $-\hat{\varphi} = 0{,}7472$ dividiert und geordnet gibt

$$\left.\begin{aligned} \text{Feld 1: } M_{2r} &= (0{,}0225 \qquad\quad \xi^3 - 0{,}0225\,\xi^2)\,P\,l\,, \\ \text{Feld 2: } M_{2r} &= (-0{,}0618\,\xi^3 + 0{,}1124\,\xi^2 + 0{,}0225\,\xi)\,P\,l\,, \\ \text{Feld 3: } M_{2r} &= (0{,}6085 \quad \xi^3 - 1{,}3383\,\xi^2 + 0{,}7301\,\xi)\,P\,l\,. \end{aligned}\right\} \quad \left(\xi = \frac{x}{l}\right) \tag{1.06}$$

Den Funktionsverlauf zeigt Abb. 12.

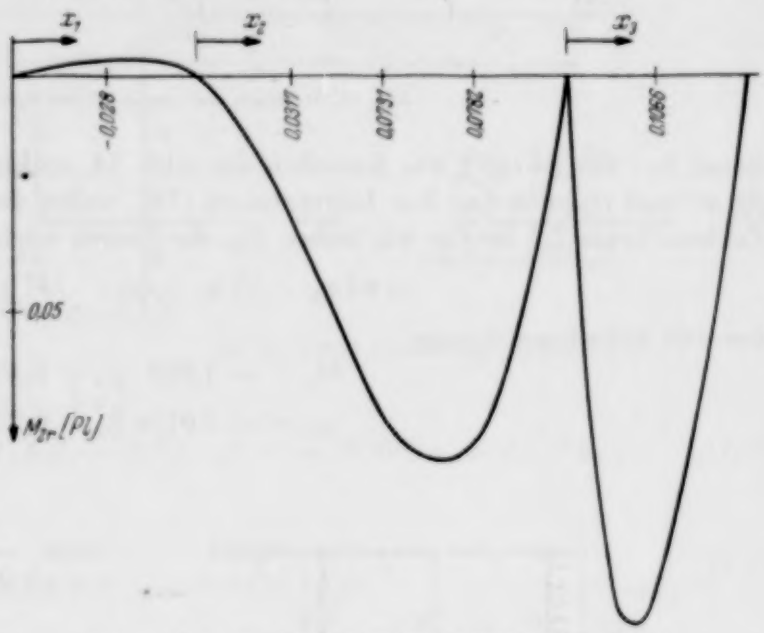


Abb. 12. Momenten-Einflußlinie für den Rahmen der Abb. 11.

b) Zweites Beispiel. Das offene verzweigte Tragwerk von Abb. 13 ist zu berechnen. Wie ist die Rechnung abzuändern, wenn die Anschlüsse in B und C nicht biegesteif, sondern gelenkig sein sollen? Das Tragwerk sei in Längsrichtung starr ($1/EF = 0$), die Biegesteifigkeit des Mittelpfostens $ABCD$ sei $2\,EJ$, die aller übrigen Felder EJ. Gegebene Werte sind

$$\left.\begin{aligned} l = 2{,}00\text{ m}\,, \quad EJ &= 80\text{ tm}^2\,, \\ q &= 11\text{ t/m} \end{aligned}\right\} \tag{2.01}$$

oder mit $l^* = l$, $P^* = 2\,EJ/l^2$, und wenn wir im Hinblick auf die Nenner in Tabelle I,1 vorerst

$$q^* = 24\,P^*/l^* = 480\text{ t/m}$$

wählen,

$$l = 1\,, \quad EJ = 1/2\,, \quad q = 24\,, \quad \text{d. h. } P^* = q\,l/24\,, \quad P^*\,l^* = q\,l^2/24\,. \tag{2.02}$$

Das Schema der Anfederung zeigt die Abb. 13 rechts.

1. Berechnung des Zweiges I nach Abb. 14. Die Anschlußkräfte und -momente der Pfosten 12 und 13 finden wir in Tabelle 2, Fall 1a vor; da beide Pfosten unbelastet sind, verschwinden die $\sim$-Glieder, und es verbleibt

$$\begin{pmatrix} M \\ Q \end{pmatrix}_{ie} = EJ \begin{pmatrix} -6/l^2 & -4/l \\ -12/l^3 & -6/l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \varphi \end{pmatrix}_{ie} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \varphi \end{pmatrix}_{ie} = \begin{pmatrix} -3\,w & -2\,\varphi \\ -6\,w & -3\,\varphi \end{pmatrix}_{ie} (i = 12{,}13). \tag{2.03}$$

Der Pfosten 11 ist gelenkig angeschlossen (Nebenbedingung!) wir eliminieren daher den Winkel φ_{11}, indem wir die mit $-1{,}5$ multiplizierte erste Zeile der Federmatrix (2.03) zur zweiten addieren und $M_{11} = 0$ setzen.

$$\begin{pmatrix} M - \tilde{M} \\ Q - \tilde{Q} \end{pmatrix}_{11} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w - \tilde{w} \\ \varphi - \tilde{\varphi} \end{pmatrix}_{11} \cdot (-1{,}5) \tag{2.04}$$

$$(Q - \tilde{Q})_{11} - 1{,}5(0 - \tilde{M}_{11}) = -1{,}5(w - \tilde{w})_{11} \quad \rightarrow \quad Q_{11} = (\tilde{Q} - 1{,}5\,\tilde{M} + 1{,}5\,\tilde{w})_{11} - 1{,}5\,w_{11}$$

oder mit den Werten aus Tabelle I,1, Spalte 3 und aus Formel (2.02)

$$Q_{11} = (24 - 1{,}5 \cdot 24/2 + 1{,}5 \cdot 24/12) - 1{,}5\, w_{11} = 9 - 1{,}5\, w_{11}\,. \tag{2.05}$$

Da die w,Q-Richtungen der Pfosten mit der (L, u)-Richtung des waagerechten Trägers I zusammenfallen, setzen wir in (2.03) und (2.05) $w_{11} = w_{12} = w_{13} = u_3$, ferner $\varphi_{12} = \varphi_1$, $\varphi_{13} = \varphi_2$ und bekommen als eingeleitete Kraftgrößen (die eingeklammerten Werte übersehen wir vorerst)

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= 0 && , \quad Q_{11} = 9 - 1{,}5\, u_3 && (= -8{,}467)\,, \\ M_{12} &= -3\, u_3 - 2\, \varphi_1 \,(= -0{,}721)\,, && Q_{12} = && -6\, u_3 - 3\, \varphi_1 \,(= -1{,}614)\,, \\ M_{13} &= -3\, u_3 - 2\, \varphi_2 \,(= -0{,}832)\,, && Q_{13} = && -6\, u_3 - 3\, \varphi_2 \,(= -1{,}781)\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.06}$$

$$L_3 = \sum Q_i = 9 - 13{,}5\, u_3 - 3\,(\varphi_1 + \varphi_2)\,(= 5{,}072)\,. \tag{2.07}$$

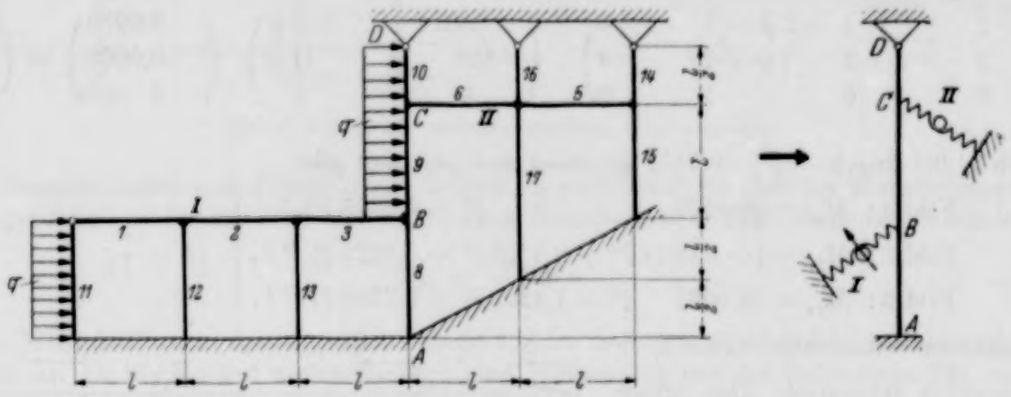


Abb. 13. Mehrfach verzweigter offener Rahmen mit Hauptträger.

Somit hat der Zweig I das Aussehen der Abb. 14, rechts. Wir unterdrücken die Paare (L, u) und (Q, w) und rechnen mit den Leitmatrizen (18), wobei die $w_i = 0$ zu setzen sind. Unten rechts im Zahlenschema 2.I finden wir neben $\mathfrak{L}_{f3}$ die beiden Gleichungen

$$-64\, \varphi_0 + 15\, u_3 = \varphi_3\,; \quad 117\, \varphi_0 - 27\, u_3 = M_3$$

vor und berechnen daraus

$$M_3 = -1{,}828\ \ \varphi_3 + 0{,}422\ \ u_3\,, \tag{2.08}$$

$$\varphi_0 = -0{,}0156\, \varphi_3 + 0{,}2344\, u_3\,. \tag{2.09}$$

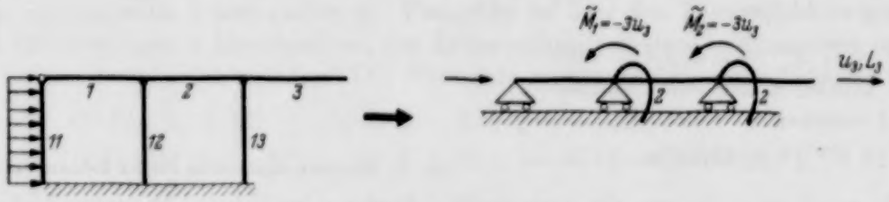


Abb. 14. Teil I des Rahmens von Abb. 13.

Mit den Werten $\varphi_1 = -2\, \varphi_0$, $\varphi_2 = 11\, \varphi_0 - 3\, u_3$ aus dem Schema 2.I wird nun nach (2.07) und (2.09)

$$\begin{aligned} L_3 - 9 = -13{,}5\, u_3 - 3\,(9\, \varphi_0 - 3\, u_3) &= -4{,}5\, u_3 - 27\,(-0{,}0156\, \varphi_3 + 0{,}2344\, u_3) \\ &= -10{,}828\, u_3 + 0{,}422\, \varphi_3\,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

und das gibt zusammen mit (2.08)

$$\begin{pmatrix} M_3 \\ L_3 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}422 & -1{,}828 \\ -10{,}828 & 0{,}422 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Wie nach (42) zu erwarten, ist diese Federmatrix nebensymmetrisch; die Elemente c_{ii} sind negativ.

2. Berechnung des Zweiges II. Wir stellen den abgeschnittenen Zweig auf den Kopf, damit das freie Ende rechts liegt (Abb. 15), was zwar nicht unbedingt notwendig, aber für die Anschauung bequem ist. Für die Pfosten 14 und 16 wird nach Tabelle 2, 2a

$$\mathfrak{C}_{14} = \mathfrak{C}_{16} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3/0{,}5^2 & -3/0{,}5 \\ -3/0{,}5^3 & -3/0{,}5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

und für die Pfosten 15 und 17 nach Tabelle 2, 1b):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{C}_{15} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \\ \mathfrak{C}_{17} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6/1{,}5^2 & -4/1{,}5 \\ -12/1{,}5^3 & 6/1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -4/3 \\ -16/9 & 4/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Da Belastungsglieder nicht vorhanden sind und wegen $w_{14} = w_{15} = w_{16} = w_{17} = u_6$, ferner $\varphi_{14} = \varphi_{15} = \varphi_4$, $\varphi_{16} = \varphi_{17} = \varphi_5$ sind die in den Punkten 4 und 5 in den Träger II eingeleiteten Kraftgrößen

$$\left.\begin{aligned} M_{14} &= -6\,u_6 - 3\,\varphi_4 \,(= \;\; 6{,}954); \quad Q_{14} = -12\,u_6 - 6\,\varphi_4 \,(= 13{,}908)\,, \\ M_{15} &= \;\; 3\,u_6 - 2\,\varphi_4 \,(= -5{,}499); \quad Q_{15} = -6\,u_6 + 3\,\varphi_4 \;\; (= 10{,}420)\,, \\ M_{16} &= -6\,u_6 - 3\,\varphi_5 \,(= \;\; 7{,}787); \quad Q_{16} = -12\,u_6 - 6\,\varphi_5 \,(= 15{,}574)\,, \\ M_{17} &= \;\; \frac{4}{3}\,u_6 - \frac{4}{3}\,\varphi_5 \,(= -2{,}330); \quad Q_{17} = -\frac{19}{6}\,u_6 + \frac{4}{3}\,\varphi_5 \,(= 2{,}974)\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

$$L_6 = \sum Q_i = -31\tfrac{7}{9}\,u_6 - 3\,\varphi_4 - 4\tfrac{2}{3}\,\varphi_5 \,(= 42{,}876)\,. \tag{2.15}$$

Die Drehfederkonstanten sind demnach $C_4 = 3 + 2 = 5$ und $C_5 = 3 + 4/3 = 13/3$ (Abb. 15 rechts). Das Zahlenschema 2.II liefert die beiden Gleichungen

$$57\tfrac{1}{3}\,\varphi_4 + 20\tfrac{1}{3}\,u_6 = \varphi_6\,;$$

$$-107\tfrac{2}{3}\,\varphi_4 - 37\tfrac{2}{3}\,u_6 = M_6\,,$$

das heißt

$$M_6 = -1{,}878\,\varphi_6 + 0{,}517\,u_6\,, \tag{2.16}$$

$$\varphi_4 = 0{,}0174\;\varphi_6 - 0{,}355\,u_6\,. \tag{2.17}$$

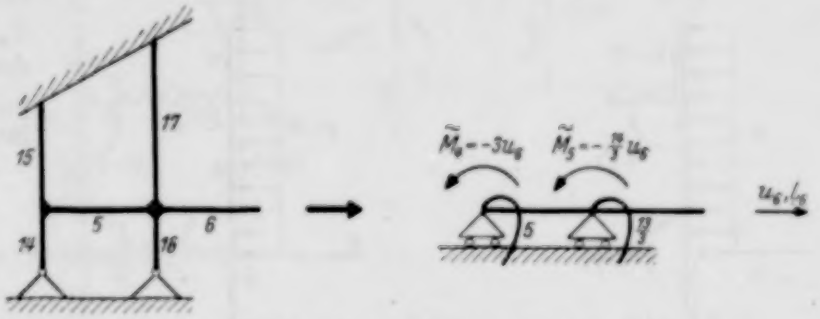


Abb. 15. Teil II des Rahmens von Abb. 13.

Nun setzen wir in (2.15) ein und erhalten

$$L_6 = -31{,}778\,u_6 - 3\,\varphi_4 - 4{,}667\,(-7\,\varphi_4 - 3\,u_6)$$

$$= -17{,}778\,u_6 + 29{,}667\,(0{,}0174\,\varphi_6 - 0{,}355\,u_6) = -28{,}299\,u_6 + 0{,}517\,\varphi_6\,, \tag{2.18}$$

also zusammen mit (2.16)

$$\begin{pmatrix} M_6 \\ L_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}517 & -1{,}878 \\ -28{,}299 & 0{,}517 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_6 \\ \varphi_6 \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

Zahlenschema 2.I

$$\begin{array}{lccc|cc} & & & & \varphi_0 & 1 \\ \hline & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0{,}0863 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{f}_0\,,$$

$$\begin{array}{lccc|cc} \mathfrak{L}_{f1} & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ & 3 & -2 & -3\,u_3 & -2 & 7 \\ & -1 & 1 & 1+3\,u_3 & 2 & 0 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} -0{,}173 \\ -0{,}462 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{f}_1\,,$$

$$\begin{array}{lccc|cc} \mathfrak{L}_{f2} & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ & 3 & -2 & -3\,u_3 & -2 & 11 \\ & -1 & 1 & 1+3\,u_3 & 2 & 0 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} -0{,}117 \\ -0{,}426 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{f}_2\,,$$

$$\begin{array}{lccc} \mathfrak{L}_{f3} & -2 & 1 & 0 \\ & 3 & -2 & 0 \\ & -1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} -64 & 15\,u_3 \\ 117 & -27\,u_3 \\ 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} -0{,}193 \\ 0{,}503 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{f}_3\,,$$

3. Berechnung des Hauptträgers *ABCD*. Nach Abb. 16 ist in den Anschlußpunkten *B* und *C* zu setzen

$$u_3 = w_8\,, \quad w_3 = 0\,, \quad \varphi_3 = \varphi_8; \qquad u_6 = -w_9\,, \quad w_6 = 0\,, \quad \varphi_6 = \varphi_9\,. \tag{2.20}$$

Zahlenschema 2.11

$$\begin{array}{c} \\ \mathfrak{L}_{f5} \\ \\ \\ \mathfrak{L}_{f6} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \varphi_4 \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \\ \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -3\,u_6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -3\,u_6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}578 \\ 1{,}455 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{f}_4\,,$$

$$\mathfrak{L}_{f5} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & \frac{-14}{3}\,u_6 & -13/3 \\ -1 & 1 & 1+\frac{14}{3}\,u_6 & 13/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -3\,u_6 \\ 43\frac{1}{3} & 14\frac{1}{3}\,u_6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}300 \\ 4{,}279 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{f}_5\,,$$

$$\mathfrak{L}_{f6} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57\frac{1}{3} & 20\frac{1}{3}\,u_6 \\ -107\frac{2}{3} & -37\frac{2}{3}\,u_6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3{,}681 \\ -7{,}660 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{f}_6\,,$$

Somit wird aus (2.11) und (2.19), wenn wir beachten, daß $-L_6$ (nicht $+L_6$) mit der positiven Q, w-Richtung des Hauptträgers zusammenfällt,

$$\begin{pmatrix} M_3 \\ L_3 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}422 & -1{,}828 \\ -10{,}828 & 0{,}422 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_8 \\ \varphi_8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} M_6 \\ -L_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}517 & -1{,}878 \\ -28{,}299 & -0{,}517 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_9 \\ \varphi_9 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

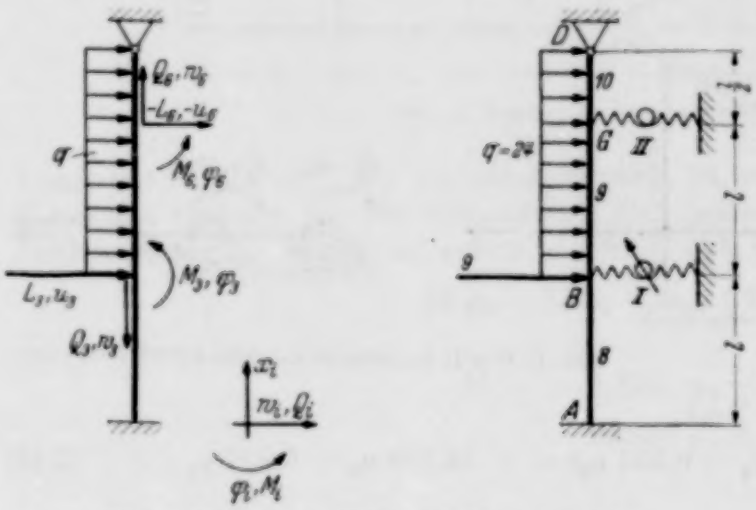


Abb. 16. Mittelpfosten $ABCD$ des Rahmens von Abb. 13.

Diese beiden Federmatrizen sind daher in $\mathfrak{L}_8$ und $\mathfrak{L}_9$ (Schema 2.III) einzusetzen. Aus den eingerahmten Bedingungsgleichungen $\varphi_{10} = 0$ und $M_{10} = 0$ berechnen wir die beiden Freigrößen zu

$$M_7 = 1{,}7452\,, \quad Q_7 = -3{,}1044 \tag{2.22}$$

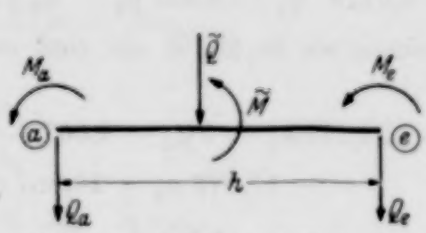


Abb. 17. Gerader Balken mit Kraftgrößen.

und wiederholen mit dem nun bekannten Anfangsvektor $\mathfrak{y}_7$ die Rechnung; in der Tat wird $w_{10} = 0$, $M_{10} = 0$, wie es sein muß.

4. Jetzt gehen wir zu den abgeschnittenen Zweigen zurück. Für die beiden Zahlenschemata 2.I und 2.II brauchen wir als erstes die Werte u_3, φ_0 bzw. u_6, φ_4. Aus dem Schema 2.III bekommen wir nach (2.20) zunächst

$$w_8 = u_3 = 0{,}355; \qquad \varphi_8 = \varphi_3 = -0{,}193\,, \tag{2.23}$$

$$-w_9 = u_6 = -1{,}448; \quad \varphi_9 = \varphi_6 = 3{,}680\,, \tag{2.24}$$

weiter aus (2.09) und (2.17)

$$\varphi_0 = -0{,}0156\,(-0{,}193) + 0{,}2344\,(0{,}355) = 0{,}0863\,, \tag{2.25}$$

$$\varphi_4 = \quad 0{,}0174\,(3{,}680) - 0{,}355 \cdot (-1{,}448) = 0{,}5777\,, \tag{2.26}$$

berechnen damit alle Werte φ_i, M_i in 2.I und 2.II und ebenso die von den Pfosten in die waagerechten Träger eingeleiteten [in (2.06) und (2.14) eingeklammerten] Kraftgrößen. Da diese aber gleich der im Anschlußpunkt reduzierten Gesamtbelastung eines jeden Pfosten sind, findet man deren Reaktionen Q_a und M_a in den Einspannungen bzw. Gelenken und daraus Querkräfte und Biegemomente der Pfosten nach Abb. 17 auf folgende Weise:

$$Q_a = Q_e - \tilde{Q}\,, \quad M_a = M_e - (Q_e - \tilde{Q})\,h - \tilde{M}\,, \tag{2.27}$$

zum Beispiel für die Pfosten 11, 12 und 16

$$\left\{\begin{array}{l} Q_{11a} = Q_{11e} - 24 = 8{,}467 - 24 = -15{,}533\,, \\ Q_{12a} = Q_{12e} - 0 = -1{,}614\,, \\ Q_{16a} = Q_{16e} - 0 = 15{,}574\,, \\ M_{11a} = M_{11e} - (Q_{11e} - 24)\cdot 1 - 12 = 0 - 8{,}467 + 12 = 3{,}533\,, \\ M_{12a} = M_{12e} - Q_{12e}\cdot 1 = -0{,}721 + 1{,}614 = 0{,}893 \\ M_{16a} = M_{16e} - Q_{16e}/2 = 7{,}787 - 15{,}574/2 = 0\,. \end{array}\right\} \tag{2.28}$$

Schließlich gibt die Gleichung (20), die hier infolge der fehlenden Belastung übergeht in

$$Q_i = \text{const} = \frac{1}{l_i}\,(M_i - M_{i-1})\,, \tag{2.29}$$

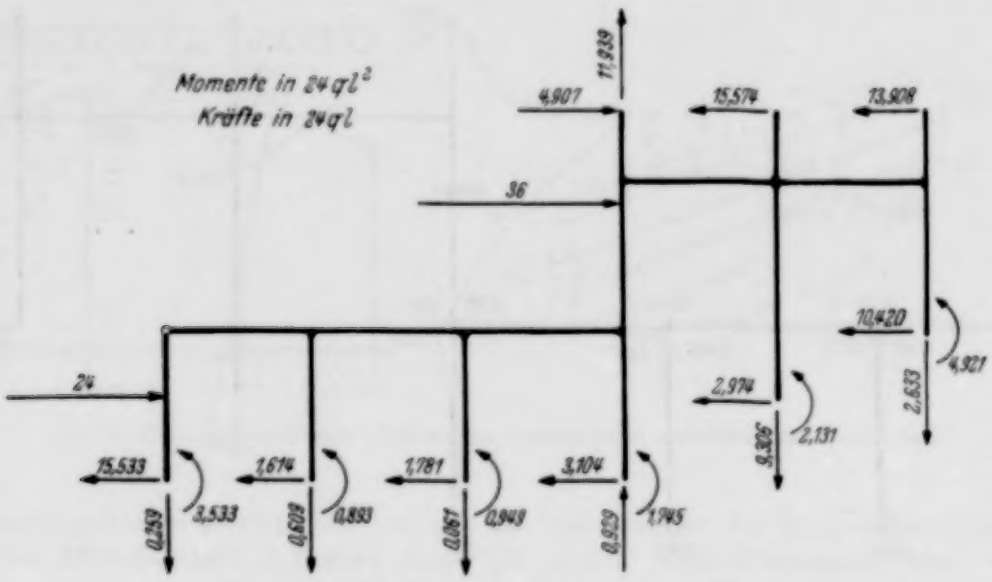


Abb. 18. Gleichgewichtssystem am Tragwerk von Abb. 13.

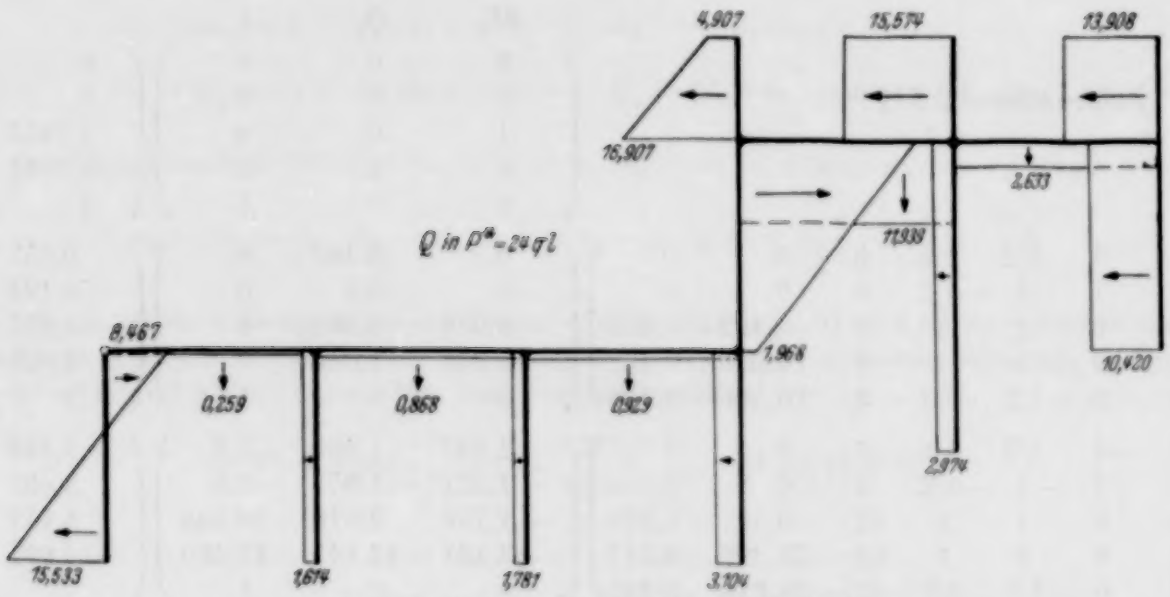


Abb. 19. Querkraftverlauf für das Tragwerk von Abb. 13.

den Querkraftverlauf der Träger I und II und damit auch die senkrechten Auflagerkräfte, d. h. die Längskräfte in den Pfosten. Anhand der Abb. 18 bestätigt man leicht, daß die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind. Die Abb. 19 und 20 zeigen Querkraft- und Momentenverlauf, und zwar in den Dimensionen $P^* = q\,l/24$ und $P^*\,l^* = q\,l^2/24$ für beliebige Werte von q und l. Die Dimensionen der Drehwinkel und Verschiebungen sind 1 und $l^* = l$. Nach (2.01) müssen wir diese Werte bei der gegebenen Belastung noch mit $11/480 = 0{,}0229$ multiplizieren. Beispielsweise hat die waagerechte Verschiebung des Zweiges I, nämlich $u_3 = w_8 = 0{,}355\,l^*$ (2.23) die wahre Größe

$$0{,}0229 \cdot 0{,}355 \cdot 200\ \text{cm} = 1{,}63\ \text{cm}.$$

5. Sollen nun die Zweige I und II in B und C gelenkig angeschlossen werden, so ist in den Federmatrizen (2.11) und (2.19) $M_3 = 0$ bzw. $M_6 = 0$ zu setzen. Addiert man die mit passenden Vielfachen multiplizierten ersten Zeilen zu den zweiten, so daß q_3 bzw. q_6 herausfällt, so wird

$$\begin{pmatrix} 0 \\ L_3 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}422 & -1{,}828 \\ -10{,}731 & 0{,}0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ L_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}527 & -1{,}878 \\ -28{,}157 & 0{,}000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_6 \\ q_6 \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

also nach (2.20)

$$\left.\begin{aligned} L_3 = \tilde{Q}_8 = 9 - 10{,}731\, u_8\,, \quad q_3 = (\neq q_8) = \frac{0{,}422}{1{,}828}\, u_8 = 0{,}231\, u_8\,. \\ -L_6 = \tilde{Q}_9 = -28{,}157\, u_9\,, \quad q_6 = (\neq q_9) = \frac{-0{,}517}{1{,}878}\, u_9 = -0{,}275\, u_9\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

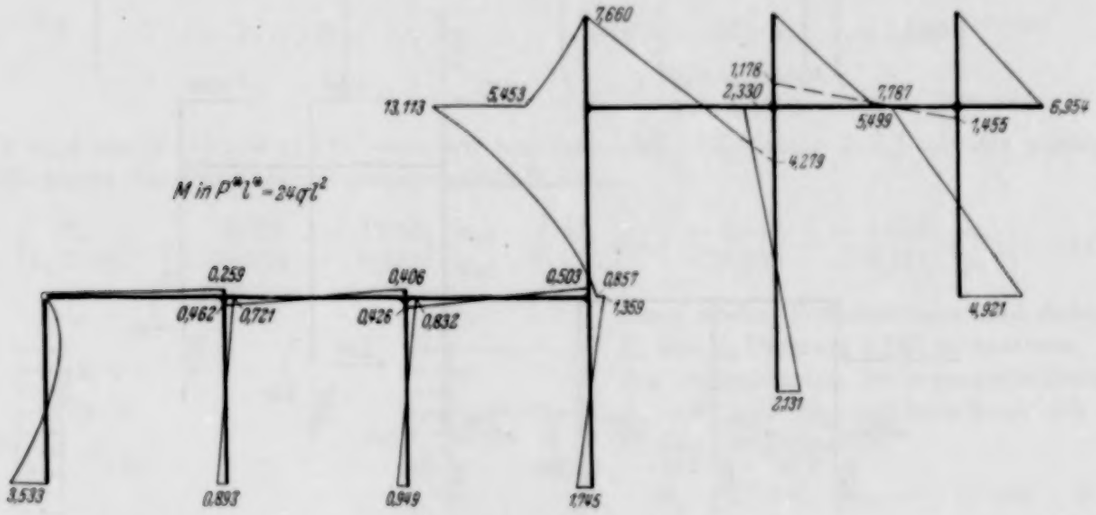


Abb. 20. Biegemomentenverlauf für das Tragwerk von Abb. 13.

Zahlenschema 2.III

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \mathfrak{L}_8 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \mathfrak{L}_9 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \mathfrak{L}_{10} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|cc} & & & & & M_7 & Q_7 & 1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -1 & 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0{,}422 & -1{,}828 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -10{,}828 & 0{,}422 \\ -1 & 0 & -1/2 & -5/3 & -8 & 10{,}506 & 1{,}406 \end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -1 & 1/2 & 1/6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 12 & -0{,}517 & -1{,}878 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 24 & -28{,}299 & -0{,}517 \\ -1 & 0 & -1/2 & -5/3 & -40 & -28{,}816 & 2{,}395 \end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1/2 & 1/8 & 1/48 & 1/16 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/8 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ -1 & -1/2 & -5/8 & -1{,}396 & \ldots \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{ccc} 0{,}5 & 0{,}167 & 0 \\ -1 & -0{,}5 & 0 \\ 3{,}039 & 1{,}984 & 0 \\ -5{,}836 & -1{,}016 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{ccc} 2{,}047 & 1{,}490 & 2{,}5 \\ -1{,}121 & -1{,}977 & -0{,}5 \\ -1{,}750 & 3{,}910 & 20{,}646 \\ -63{,}181 & -42{,}147 & -37{,}489 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{ccc} 1{,}072 & 2{,}089 & 4{,}612 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -33{,}340 & -17{,}163 & 4{,}902 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1{,}7452 \\ -3{,}1044 \\ 1 \end{array}\right) = \mathfrak{y}_7, \\ \left(\begin{array}{c} 0{,}355 \\ -0{,}193 \\ -0{,}857 \\ 1{,}968 \\ 1 \end{array}\right) = \mathfrak{y}_8, \\ \left(\begin{array}{c} 1{,}448 \\ 3{,}680 \\ 5{,}453 \\ -16{,}907 \\ 1 \end{array}\right) = \mathfrak{y}_9, \\ \left(\begin{array}{c} 0{,}000 \\ 3{,}566 \\ 0{,}000 \\ -4{,}907 \\ 1 \end{array}\right) = \mathfrak{y}_{10}. \end{array}$$

Man hat daher die Federmatrizen (2.21) in $\mathfrak{L}_8$ bzw. $\mathfrak{L}_9$ zu ersetzen durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -10{,}731 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -28{,}157 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Die beiden Koppelfedern in B und C (Abb. 16) sind somit in gewöhnliche horizontal wirkende Druckfedern entartet. Von Formel (2.21) an ist die Rechnung mit neuen Zahlenwerten zu wiederholen. Für die Praxis besonders angenehm ist der Umstand, daß die beiden Federmatrizen (2.11) und (2.19) von zwei Rechnern gleichzeitig und unabhängig ermittelt und kontrolliert werden können. Von der absoluten Überlegenheit der hier gezeigten Methode überzeugt man sich am besten, wenn man die Aufgabe nach dem üblichen Eliminationsverfahren zu rechnen versucht; das Tragwerk ist 18fach statisch, bzw. 13fach geometrisch überbestimmt.

c) Drittes Beispiel. Gegeben ist das symmetrische und symmetrisch belastete offene Tragwerk von Abb. 21. Alle Stäbe seien in Längsrichtung starr. Man ermittle Querkraft-, Längskraft- und Biegemomentenverlauf.

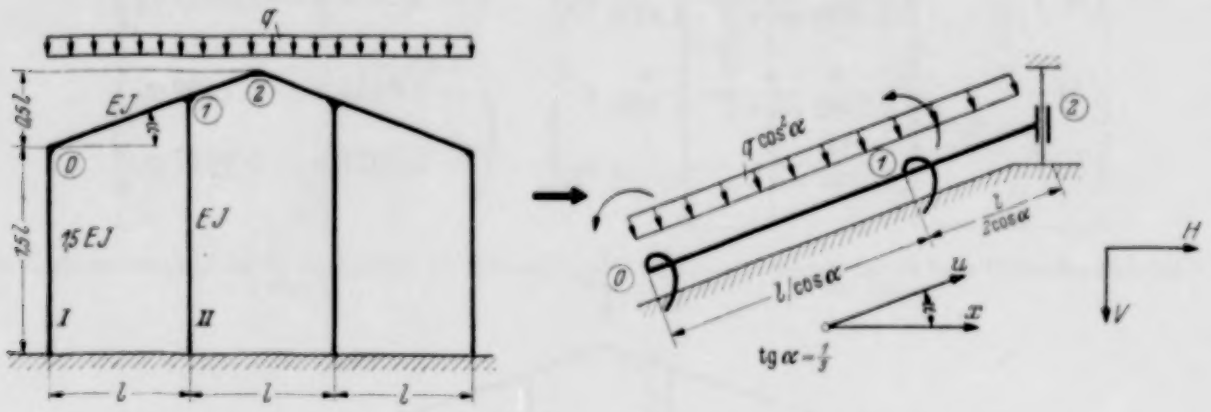


Abb. 21. Offener symmetrischer Rahmen mit symmetrischer Belastung, dazu Ersatzträger.

Aus Symmetriegründen können wir uns auf die linke Hälfte des Tragwerkes beschränken. Die Bedingungen im Mittelschnitt 2 lauten dann (H und V sind Horizontal- bzw. Vertikalkräfte)

$$q_2 = 0\,, \tag{3.01}$$

$$x_2 = w_2 \sin\alpha + u_2 \cos\alpha = 0 \;\rightarrow\; w_2 = -\,u_2 \operatorname{cotg}\alpha\,, \tag{3.02}$$

$$V_2 = Q_2 \cos\alpha - L_2 \sin\alpha = 0 \;\rightarrow\; Q_2 = (L_2/\cos\alpha)\sin\alpha = H_2 \sin\alpha\,. \tag{3.03}$$

Infolge der Längsstarrheit ist $u_0 = u_1 = u_2 = u$, $w_0 = w_1 = u \operatorname{tg}\alpha$, $w_2 = -\,u \operatorname{cotg}\alpha$, also

$$w_0 - w_1 = 0\,,\quad w_1 - w_2 = u \operatorname{tg}\alpha + u \operatorname{ctg}\alpha = u\left(\frac{1}{3} + 3\right) = \frac{10}{3}\,u\,. \tag{3.04}$$

Ebenso wie im zweiten Beispiel unterdrücken wir die Paare (L,u) und (Q,w), ersetzen die beiden Pfosten I und II durch Koppelfedern und zerlegen die senkrecht wirkende Belastung in ihre beiden Anteile $q\cos^2\alpha$ und $q\sin\alpha\cos\alpha$. Mit den Vergleichsgrößen

$$l^* = l/\cos\alpha\,,\quad P^* = \frac{2\,E\,J}{(l/\cos\alpha)^2}\,,\qquad q^* = 12\;P^*/l^*$$

wird

$$l/\cos\alpha = 1\,,\quad E\,J = 1/2\,,\quad q = 12\,; \tag{3.05}$$

ferner ist

$$\sin\alpha = 1/\sqrt{10} = 0{,}3162\,,\quad \cos\alpha = 3/\sqrt{10} = 0{,}9487\,. \tag{3.06}$$

Für die Lastspalte der Matrix (18) brauchen wir jetzt die Werte der Tabelle 1, 3

$$\left.\begin{aligned} &\overset{z}{\bar{q}}_1 = \frac{-\,q^*\,1^3}{24\cdot 1/2} = -\,1,\ \overset{z}{\bar{q}}_2 = -\frac{12\cdot(1/2)^3}{24\cdot 1/2} = -\,\frac{1}{8}\,,\ w_0 - w_1 = 0,\ \frac{3}{l_2}(w_1 - w_2) = \frac{3}{1/2}\,\frac{10}{3}\,u = 20\,u\,,\\ &\overset{zz}{\bar{M}}_1 = \frac{q^*\,1^2}{4} = 3\,,\quad \overset{zz}{\bar{M}}_2 = \frac{12\,(1/2)^2}{4} = \frac{3}{4}\,,\quad -\,6\,E\,J\,(w_1 - w_2)/l_2^2 = -\,12\,\frac{10}{3}\,u = -\,40\,u\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.07}$$

Mit den Längen und Biegesteifigkeiten der beiden Pfosten

$$\left.\begin{aligned} EJ_{\mathrm{I}} &= 1{,}5\,\frac{1}{2} = 0{,}75\,, \quad l_{\mathrm{I}} = 1{,}5\,l = 1{,}5\cos\alpha\cdot 1^{*} = 1{,}5\cdot 0{,}9487 = 1{,}4230\,,\\ EJ_{\mathrm{II}} &= 1{,}0\,\frac{1}{2} = 0{,}50\,, \quad l_{\mathrm{II}} = \frac{11}{6}\,l = \frac{11}{6}\cos\alpha\cdot 1^{*} = \frac{11}{6}\,0{,}9487 = 1{,}7392 \end{aligned}\right\} \tag{3.08}$$

bekommen wir als in den Hauptträger (Abb. 21 rechts) eingeleitete Biegemomente M_i und Horizontalkräfte H_i mit $x_i = u/\cos\alpha$ und nach Tabelle 2, 1a

$$\begin{pmatrix} M \\ H \end{pmatrix}_{\mathrm{I}} = 0{,}75 \begin{pmatrix} \dfrac{-6}{1{,}4230}\,\dfrac{u}{\cos\alpha} - \dfrac{4}{1{,}4320}\,\varphi_0 \\ \dfrac{-12}{1.4230}\,\dfrac{u}{\cos\alpha} - \dfrac{6}{1{,}4230}\,\varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}3424\,u - 2{,}1082\,\varphi_0 \\ -3{,}2922\,u - 2{,}2222\,\varphi_0 \end{pmatrix}, \tag{3.09}$$

$$\begin{pmatrix} M \\ H \end{pmatrix}_{\mathrm{II}} = 0{,}50 \begin{pmatrix} \dfrac{-6}{1{,}7392}\,\dfrac{u}{\cos\alpha} - \dfrac{4}{1{,}7392}\,\varphi_1 \\ \dfrac{-12}{1{,}7392}\,\dfrac{u}{\cos\alpha} - \dfrac{6}{1{,}7392}\,\varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}0454\,u - 1{,}1499\,\varphi_1 \\ -1{,}2021\,u - 0{,}9917\,\varphi_1 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

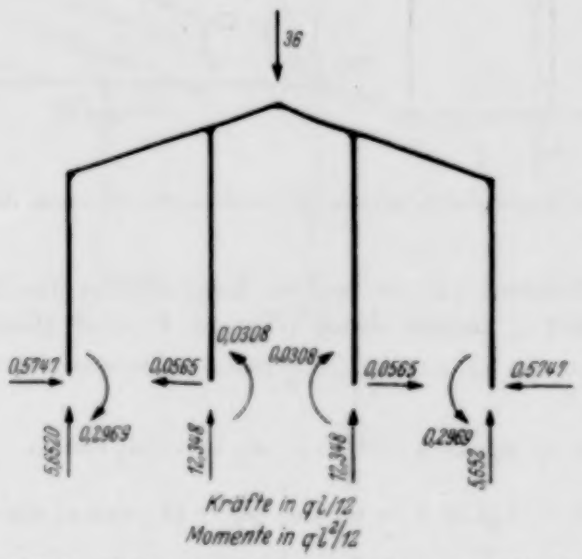


Abb. 22. Gleichgewichtssystem am Rahmen von Abb. 21.

Die Drehfederkonstanten des Hauptträgers sind demnach $C_0 = 2{,}1082$ und $C_1 = 1{,}1499$. Damit läßt sich das Zahlenschema ausfüllen. Die eingerahmte Bedingung $\varphi_3 = 0$ gibt

$$\varphi_0 = -1{,}9632\,u - 0{,}2784\,, \tag{3.11}$$

und somit die Spalte (a) des Schemas. Als nächstes addieren wir die zweiten Spalten von (3.09) und (3.10):

$$\left.\begin{aligned} H_0 + H_1 = H_2 &= -4{,}4943\,u - 2{,}2222\,\varphi_0 - 0{,}9917\,\varphi_1\\ &= -4{,}4943\,u - 2{,}2222\,(-1{,}9632\,u - 0{,}2784) - 0{,}9917\,(5{,}7228\,u + 0{,}1437)\,,\\ H_2 &= -5{,}8071\,u + 0{,}4762\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Weiter wird nach (20)

$$\left.\begin{aligned} Q_2 = \frac{M_2 - M_{1r} - \widetilde{M}_2}{l_2} + \widetilde{Q}_2 &= [(28{,}5536\,u - 0{,}0394) - (-17{,}1084\,u + 0{,}8258) - 1{,}5]\,2 + 6\,,\\ Q_2 &= 91{,}3240\,u + 1{,}2696\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

und aus der Bedingung (3.03)

$$Q_2 = 91{,}3240\,u + 1{,}2696 = H_2 \sin\lambda = (-5{,}8071 + 0{,}4762)\,0{,}3162$$

folgt nun

$$u = -0{,}0120\,. \tag{3.14}$$

In der Endspalte (b) des Schemas finden wir jetzt die Biegemomente in der Dimension $P^* l^* = q^* l^{*2}/12 = q l^2/12$ vor, berechnen daraus den Querkraftverlauf nach (20), weiter aus den nun zahlenmäßig vorliegenden eingeleiteten Kraftgrößen (3.09) und (3.10) Querkraft und Biegemoment

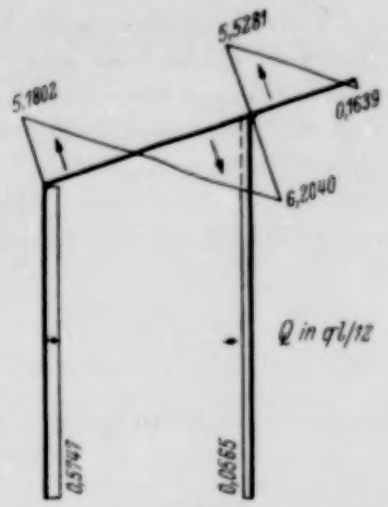


Abb. 23. Querkraftverlauf für die linke Hälfte des Rahmens von Abb. 21.

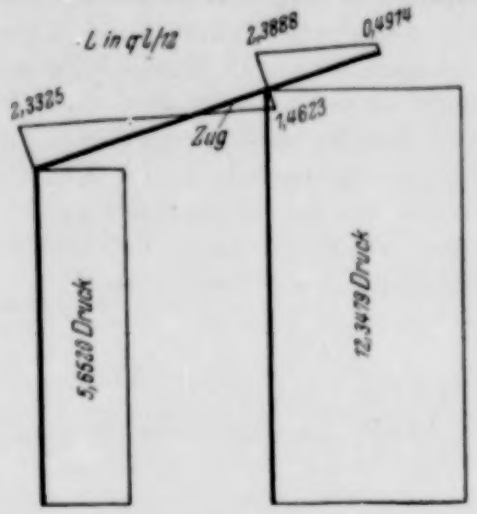


Abb. 24. Längskraftverlauf für die linke Hälfte des Rahmens von Abb. 21.

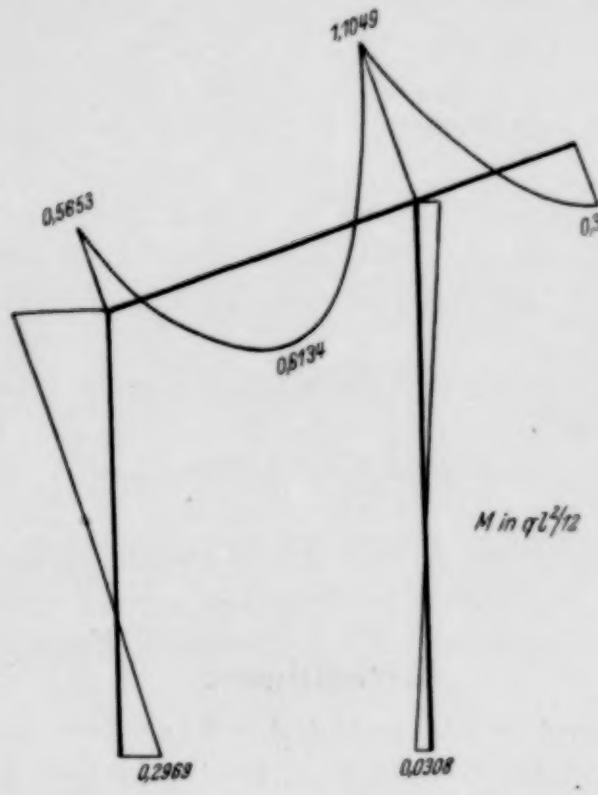


Abb. 25. Biegemomentenverlauf für die linke Hälfte des Rahmens von Abb. 21.

Zahlenschema 3

$$
\begin{array}{cccc|c}
 & & & & \varphi_0 \\
 & & & & 1 \\
\multicolumn{4}{c|}{\begin{matrix}-2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3-1{,}0454\,u \\ -1 & 1 & -1+1{,}0454\,u\end{matrix}} & \begin{matrix}0 \\ -1{,}1499 \\ 1{,}1499\end{matrix} \\
\multicolumn{4}{c|}{\begin{matrix}-2 & 0{,}5 & -0{,}125+20\,u \\ 6 & -2 & 0{,}75-40\,u \\ -4 & 1{,}5 & 0{,}375+20\,u\end{matrix}} & \\
 & & & & \\
 & & & & 1 \\
 & & & & 0 \\
 & & & & -2{,}3424\,u \\
 & & & & 1
\end{array}
\begin{array}{c}
\\
\\
\begin{matrix}-4{,}1082 & -2{,}3424\,u & -1 \\ 11{,}9404 & +6{,}3329\,u & +4{,}1499 \\ 0 & 1 & \end{matrix} \\
\boxed{\begin{matrix}14{,}1866 & 27{,}8513\,u & +3{,}950 \\ -48{,}5300 & -66{,}7202\,u & -13{,}5498 \\ 0 & 1 & \end{matrix}}
\end{array}
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{\overbrace{}^{\text{(a)}}} \\
u & 1 \\
\\
\\
\begin{matrix}-1{,}9632 & -0{,}2784 \\ 1{,}7964 & 0{,}5869 \\ 0 & 1\end{matrix} \\
\begin{matrix}0{,}0002 & 0{,}0005 \\ 28{,}5536 & -0{,}0394 \\ 0 & 0\end{matrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\text{(b)} \\
\\
\begin{matrix}-0{,}255 \\ 0{,}565 \\ 1\end{matrix} \\
\begin{matrix}0{,}000 \\ -0{,}382 \\ 1\end{matrix}
\end{array}
$$

der Pfosten und schließlich durch eine einfache Zerlegung in den Anschlußpunkten 0 und 1 auch die Längskräfte. (Abb. 22 bis 25.) Für den rechten Teil des Tragwerkes sind Momente und Längskräfte symmetrisch, die Querkräfte dagegen antisymmetrisch fortzusetzen.

12. Zusammenfassung und Ausblick. Wir haben gezeigt, wie sich mit Hilfe des Begriffes der Koppelfeder jeder offene Rahmen auf einen (oder mehrere) Durchlaufträger zurückführen läßt. Die Zahlenrechnung wurde im Hinblick auf Kontrollen und leichte Programmierbarkeit für Rechenautomaten noch weiter schematisiert durch Einführung von rechteckigen erweiterten Leitmatrizen und einer zweckmäßig definierten sogenannten „verschränkten" Matrizenmultiplikation. Drei Beispiele zeigen den praktischen Gang des Verfahrens. In einer dritten und abschließenden Arbeit sollen Tragwerke mit geschlossenen Umläufen (Stockwerkrahmen, Trägerroste, Holme usw.) behandelt werden, wobei die ganze Reichweite und Anpassungsfähigkeit des Reduktionsverfahrens noch mehr als bisher hervortreten wird.

(Eingegangen am 8. April 1957)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Sigurd Falk*, Braunschweig, Celler Str. 93a

Berichtigung

zu meiner Arbeit im Band XXV, S. 164 des Ingenieur-Archivs: „Biegetheorie der Rotationsschale mit flacher, kreisförmiger Erzeugender"

Von **R. Windels**

Die erste Gleichung (14) muß (mit Vertauschung der Indices q und x in der Klammer) lauten

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_{x,z} + \mu\,\varepsilon_{q,z}\right). \tag{14}$$

Die Gleichung (56) muß (mit Streichung des Faktors $\frac{1}{2}$ vor $\bar{\varrho}_0$) lauten

$$\varepsilon_{\substack{1\\(2)}} = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\frac{1}{16}\varepsilon^8\bar{\varrho}_0^4 + (1 \mp \bar{\varrho}_0)^2} - \frac{1}{4}\varepsilon^4\bar{\varrho}_0^2}. \tag{56}$$

(Eingegangen am 3. Dezember 1957.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *R. Windels*, Hamburg 36, Jungfernstieg 49.

Just appeared: *Soeben erschien:*

Archive for Rational Mechanics and Analysis

Edited by

C. Truesdell

Editorial Board: S. Bergman, Stanford/California (USA) — R. Berker, Istanbul (Turkey) — L. Cesari, Lafayette/Indiana (USA) — L. Collatz, Hamburg (Deutschland) — J. L. Ericksen, Baltimore/Maryland (USA) — A. Erdélyi, Pasadena/California (USA) — Irmgard Flügge-Lotz, Stanford/California (USA) — Hilda Geiringer, Cambridge/Massachusetts (USA) — H. Görtler, Freiburg i. Br. (Deutschland) — D. Graffi, Bologna (Italia) — A. E. Green, Newcastle-upon-Tyne (Great Britain) — J. Hadamard, Paris (France) — H. Lewy, Berkeley/California (USA) — A. Lichnerowicz, Paris (France) — C. C. Lin, Cambridge/Massachusetts (USA) — C. Loewner, Stanford/California (USA) — W. Magnus, New York (USA) — G. C. McVittie, Urbana/Illinois (USA) — J. Meixner, Aachen (Deutschland) — C. Miranda, Napoli (Italia) — C. Müller, Aachen (Deutschland) — A. Ostrowski, Basel (Schweiz) — R. S. Rivlin, Providence/Rhode Island (USA) — M. M. Schiffer, Stanford/California (USA) — E. Sternberg, Providence/Rhode Island (USA) — W. Tollmien, Göttingen (Deutschland) — A. Tonolo, Padova (Italia) — C. Truesdell, Bologna (Italia) — H. Villat, Paris (France).

The Archive for Rational Mechanics and Analysis appears in numbers struck off as the material reaches the press; five numbers constitute a volume.

The Archive for Rational Mechanics and Analysis nourishes the discipline of mechanics as a deductive, mathematical science in the classical tradition and promotes pure analysis, particularly in contexts of application. Its purpose is to give rapid and full publication to researches of exceptional moment, depth, and permanence.

English, French, German, Italian, and Latin are the languages of the Archive. Subscriptions may be entered through any bookseller. The price is DM 96,— per volume

Das Archive for Rational Mechanics and Analysis erscheint zwanglos in Einzelheften; fünf Hefte bilden einen Band.

Das Archive for Rational Mechanics and Analysis pflegt die Mechanik als eine deduktive mathematische Wissenschaft im klassischen Sinne und fördert die reine Analysis besonders im Hinblick auf ihre Anwendung. Es soll schnell und eingehend über wesentliche Forschungsergebnisse von bleibendem Wert berichten.

Es werden Arbeiten in englischer, französischer, deutscher, italienischer und lateinischer Sprache aufgenommen.

Bestellungen können bei jeder Buchhandlung aufgegeben werden. Preis des Bandes DM 96,—

Titles of papers in the first number: — Das erste Heft enthält folgende Beiträge:

The Mechanics of Non-linear Materials with Memory. Part I. By Professor A. E. Green, King's College, Newcastle-upon-Tyne (Great Britain), and Professor R. S. Rivlin, Division of Applied Mathematics, Brown University, Providence/Rhode Island (USA). — The Isothermal Expansion of a Gas Cloud into a Non-uniform Atmosphere. By Dr. M. H. Rogers, University of Illinois Observatory, Urbana/Illinois (USA). — The Pi Theorem of Dimensional Analysis. By Professor L. Brand, Department of Mathematics, Trinity College, Hartford/Connecticut (USA). — Über ein System partieller Differentialgleichungen. Von Professor Dr. E. Kreyszig, Department of Mathematics, Ohio State University, Columbus/Ohio (USA). — Inductions électromagnétiques en relativité générale et principe de Fermat. Par Dr. Pham Mau Quan, Paris (France). — Bezwungene Schwingungen in rotierenden Flüssigkeiten von Dr. H. Oser, Mathematisches Institut der Universität Freiburg i. Br.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Theorie schallnaher Strömungen

Von

Dr.-Ing. habil. **K. G. Guderley**

Mit 125 Abbildungen

XV, 376 Seiten Gr.-8°. 1957

Ganzleinen DM 42,—

Inhaltsübersicht: I. Allgemeine Grundlagen. — II. Vereinfachung der Strömungsdifferenzialgleichungen, Ähnlichkeitsgesetz für schallnahe Strömungen. — III. Linearisierte Behandlung schallnaher Strömungen. — IV. Exakte Lösungen der Potentialgleichung für schallnahe Strömungen. — V. Die Grundlagen der Hodographenmethode. — VI. Diskussion schallnaher Strömungsfelder mit Hilfe des Hodographen. — VII. Partikularlösungen der Tricomischen Gleichung. — VIII. Strömungen mit der MACHschen Zahl 1. — IX. Strömungsfelder, die nur wenig von einer Strömung mit der MACH-Zahl 1 abweichen. — X. Einzeluntersuchungen, die Partikularlösungen der Form Gl. (VII 3.3) benutzen. — XI. Achsensymmetrische Strömungen. — Literaturverzeichnis. — Sachverzeichnis.

Das Verhalten von Gasströmungen zeigt weitgehende Verschiedenheiten, je nachdem die Strömungsgeschwindigkeit kleiner oder größer als die Schallgeschwindigkeit ist. Der Übergang von einer Form zur anderen, das „schallnahe" Gebiet, bereitet für das Verständnis besondere Schwierigkeiten, sowohl vom physikalischen als vom mathematischen Standpunkt aus. Jedoch ist in den letzten zwölf Jahren auch hier ein gesicherter Kern der Erkenntnis geschaffen worden. Das vorliegende Buch stellt erstmalig die Theorie schallnaher Strömungen im Zusammenhang dar. Die Forschung auf diesem Gebiete ist durch eine besonders enge Wechselwirkung zwischen physikalischem und mathematischem Denken gekennzeichnet. Das bestimmt auch den Charakter dieses Buches. Es zeigt die mathematische Theorie, wie sie aus physikalischen Vorstellungen herauswächst. Dabei führt es auch in die mathematischen Fragen ein, die hier entstehen und die gelegentlich über die klassischen Fragenstellungen hinausgehen. Doch wird auch dann der Versuch gemacht, durch physikalische Vergleiche die mathematischen Ergebnisse anschaulich zu machen. Die Darstellung ist für den Aerodynamiker, der einige mathematische Erfahrungen besitzt, bestimmt; aber auch dem Mathematiker kann das Buch als Einführung in die Probleme des schallnahen Gebiets von Wert sein.

SPRINGER - VERLAG . BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Springer-Verlag • Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6 0,8 K.B./Z. 040.